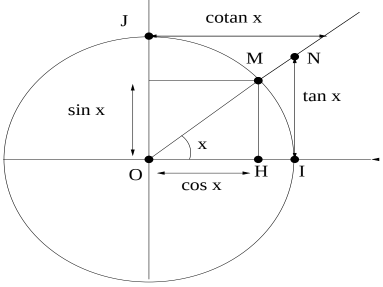
MATHEMATIQUES TD N°0 : TRIGONOMETRIE - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1èree année - 2009/2010

1 Formules de trigo

1°. Cf. figure ci-dessous :



On se place sur le cercle trigo où l'on considère un point M. Soit x une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Alors $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ est l'ordonnée de M. Si maintenant l'on considère la tangente au cercle en $I(1,0)$, alors cette droite coupe la droite (OM) en un point N. $\tan x$ est la mesure algébrique de IN. Cotangente se définit de la même façon en partant de la tangente au cercle au point $J(0,1)$

2°. Le triangle OHM est rectangle en H avec une hypoténuse de longueur 1 (le rayon du cercle trigo). D'après le théorème de Pythagore, $OH^2 + HM^2 = 1$, ou encore $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3°. Les formules ci-dessous s'obtiennent en utilisant le produit scalaire ; nous les démontrerons également à l'aide des complexes. Nous ne faisons que les rappeler :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (1)
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (3)
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ (4)

4°. $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
En divisant par $\cos a \cos b$. De même,
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

5°. A partir des formules $(1), (2), (3), (4)$, on a :
$(1) + (2) \Rightarrow \ \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ α
$(1) - (2) \Rightarrow \ \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ β
$(3) + (4) \Rightarrow \ \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ γ
$(3) - (4) \Rightarrow \ \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$ δ

6°. Posons $p = a+b$, $q = a-b \Rightarrow a = (p+q)/2$ et $b = (p-q)/2$
A partir des formules α, β, γ et δ, on a :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

7°. Il suffit de poser $a = b$ dans les formules $(1), (2), (3), (4)$:
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \Rightarrow \tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} (*)$

8°. $t = \tan \dfrac{a}{2}$. En changeant a en $a/2$ dans $(*)$, il vient :
$\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$ et $\tan^2 a = \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1 - \cos^2 a}{\cos^2 a}$
$\cos^2 a = \dfrac{1}{1 + \tan^2 a}$ et $\sin^2 a = \dfrac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$
$\Rightarrow \cos^2 a - \sin^2 a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$
On change alors a en $a/2$ et l'on obtient
$\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ puis $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

9°. α existe si et seulement si $\sin x$ et $\cos x$ sont non nuls, ie. $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$ et
$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \Rightarrow \alpha = 2$

2 Propriétés des sinus et cosinus

1°.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

2°. Les formules de l'exo précédent donnent :

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

3°. Comme ci-dessus :

$\tan(-x) = -\tan x$ $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\tan(\pi/2 - x) = cotanx$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

3 Equations trigonométriques

1°. $\cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) = \cos(x + \dfrac{\pi}{3})$

$$\iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{36}; \frac{23\pi}{36}; -\frac{25\pi}{36}\}$$

2°. $\cos(2x - \dfrac{\pi}{2}) = \cos(x + \dfrac{\pi}{3})$

$$\iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{2} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; -\frac{11\pi}{18}\}$$

3°. $\sin(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = \cos(\dfrac{x}{3} + \pi)$

$$\iff \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{3} + \pi)$$

$$\iff \cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{3} + \pi)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{5x}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{x}{6} = -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{10} + \frac{12}{5}k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 12k\pi \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{-\frac{3\pi}{10}; \frac{\pi}{10}; \frac{9\pi}{10}; -\frac{7\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\}$$

4°. $\sin 2x = \cos 3x \iff \sin 2x = \sin(\dfrac{\pi}{2} - 3x)$

$\iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\dfrac{\pi}{10}; -\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{7\pi}{10}; \dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{10}\}$

5°. $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\iff \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff \sin(x - \pi/4) = \sin(\pi/3) \iff \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

6°. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{2}$

$\iff \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(3\pi/4)$

$\iff \cos(x + \dfrac{\pi}{3}) = \cos(3\pi/4) \iff \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{11\pi}{12}\}$

7°. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 1$

$\iff \cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) = \cos 0$

$\iff 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$

8°. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré dont l'inconnue est $\cos x$

Posons $X = \cos x$. L'équation devient alors $2X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9 \Rightarrow X = 1; -1/2$

$\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ et

$\cos x = -1/2 \iff x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$

$\mathcal{S} = \{\dfrac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$

9°. $2\cos x - 3\sin x = 15$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Donc $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ et $-3 \leq 3\sin x \leq 3$

Donc $-5 \leq 2\cos x - 3\sin x \leq 5$ et l'équation ne peut donc pas être égal à 15 : il n'y a pas de solution.

10°. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

$\iff 2\cos x\cos 2x + \cos 2x = 0$ en utilisant la formule $\cos p + \cos q$ avec $\cos x$ et $\cos 3x$

$\iff \cos 2x(1 + 2\cos x) = 0$

$\iff \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -1/2 \end{cases} \iff S = \{\pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

11°. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$

Même principe que ci-dessus :

$\iff 2\cos x\cos 2x - \cos 2x = 0$

$\iff \cos 2x(2\cos x - 1) = 0 \iff S = \{\pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

Ainsi, $\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\}$

12°. $\cos x - \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\iff \cos(x + \pi/4) = \cos(\pi/3)$

$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

Ainsi, $\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \{\dfrac{\pi}{12}; -\dfrac{7\pi}{12}\}$