MATHEMATIQUES TD N°11 : TRANSFORMATION DE FOURIER ET THEORIE DU SIGNAL - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2008/2009

I.

1°. $\Pi(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t)$
$\hat{\Pi}(u) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi iut}dt = -\frac{1}{-2\pi iu}(e^{-\pi iu} - e^{\pi iu}) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}$
d'après les formules d'Euler.
La transformée d'une porte est donc un sinus cardinal.

2°. $f(t) = e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$
$\hat{f}(u) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t - 2\pi iut}dx = \frac{1}{\alpha + 2\pi iu}$

3°. $f(t) = e^{-\alpha|t|} \Rightarrow \hat{f}(u) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi u)^2}$

4°. $\Delta(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
$\hat{\Delta}(u) = \int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-2\pi iut}dt$
$= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi iut}dt - \int_{-1}^{1}|t|e^{-2\pi iut}dt = I_1 - I_2$ avec
$I_1 = \frac{\sin 2\pi u}{\pi u}$ et $I_2 = 2\int_0^1 t\cos(2\pi ut)dt$
$= \frac{1}{\pi u}(t\sin(2\pi ut))_0^1 - \frac{1}{\pi u}\int_0^1 \sin(2\pi ut)dt$

$I_2 = \frac{\sin(2\pi u)}{\pi u} + \frac{\cos(2\pi u) - 1}{2\pi u} \Rightarrow \hat{f}(u) = \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$
La transformée d'une fonction triangle est donc un sinus cardinal au carré.

5°. $f(t) = t^2\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
Il faut effectuer une double intégration par parties à partir de la définition de la transformée par l'intégrale.
$\hat{f}(u) = \int_{-1}^{1} t^2 e^{-2\pi iut}dt = \frac{1}{\pi iu}\int_{-1}^{1} te^{-2\pi iut}dt$
$= \frac{1}{2\pi^2u^2}\frac{1}{\pi u}\sin(2\pi u) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi u)}{(\pi u)^3}$

6°. $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) = \Pi(t-1/2) \Rightarrow \hat{f}(u) = e^{-\pi iu}\frac{\sin \pi u}{\pi u}$
En utilisant la formule de la translaté d'une fonction.

7°. $\mathbb{1}_{[-1,0]}(t) = \Pi(t+1/2) \Rightarrow \hat{f}(u) = e^{\pi iu}\frac{\sin \pi u}{\pi u}$
De la même façon que ci-dessus.

8°. $f(t) = t\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t) = t\Pi(t)$
$\hat{f}(u) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)' = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\cos \pi u}{u} - \frac{\sin \pi u}{\pi u^2}\right)$
En utilisant la formule de la dilatée d'une fonction. On peut également, comme dans le 5°, effectuer une intégration par parties à partir de la définition.

9°. $f(t) = \cos(2\pi t)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
f est une fonction paire, donc
$\hat{f}(u) = 2\int_0^1 \cos(2\pi t)\cos(2\pi ut)dt$
$= \int_0^1 (\cos((u+1)\pi t) + \cos((u-1)\pi t))\,dt$
$= \frac{\sin(u+1)}{\pi(u+1)} + \frac{\sin(u-1)}{\pi(u+1)}$

10°. $g(t) = \frac{t^k}{k!}e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) = \frac{t^k}{k!}f(t)$
avec $f(t)$ donné dans la question 2.
$\hat{f}(u) = \frac{1}{\alpha + 1\pi iu} \Rightarrow \hat{g}(u) = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{du^k}(\frac{1}{2\pi iu})^k$
$\Rightarrow \hat{g}(u) = \frac{1}{(\alpha + 2\pi iu)^k}$

II.

1°. Cette fonction a la forme d'un trapèze. Elle est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-2a, 2a]$ et vaut a sur $]-a, a[$. Sur $[-2a, -a]$ et $[a, 2a]$ c'est un segment de droite d'équation $2a \pm t$.

2°. La fontion est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en $\pm 2a$ et $\pm a$. Sa dérivée est $\phi'(t) = \mathbb{1}_{[-2a,-a]}(t) - \mathbb{1}_{[a,2a]}(t)$. Par ailleurs, la transformée de $\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$ est $\frac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}$. La tranformée de la porte droite est donc $\frac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}e^{-4\pi iua}$ et celle de la porte gauche est $\frac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}e^{4\pi iua}$. Ainsi, la transformée de la dérivée est $-2i\frac{1}{\pi u}\sin(4\pi ua)\sin(2\pi ua)$. Enfin, d'après la propriété de dérivation,

$$\hat{\phi}(u) = \frac{\sin(4\pi ua)\sin(2\pi ua)}{(\pi u)^2}$$

III.

1°. Commençons par la transfo de Fourier de
$\Pi(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$. On sait que $\hat{\pi}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$
Si la porte a une largeur L, alors
$\Pi(t) = \mathbb{1}_{[-L/2,L/2]}(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t/L)$ a pour transfo $\frac{\sin(\pi uL)}{\pi u}$
Maintenant si le centre de la porte est en τ, alors
$\Pi(t) = \mathbb{1}_{[-L/2,L/2]}(t-\tau)$ a pour transfo $\frac{\sin(\pi uL)}{\pi u}e^{-2\pi iu\tau}$
Enfin, par linéarité, on en déduit que la transformée de la porte de hauteur h, centrée en τ et de largeur L est :

$$h\frac{\sin(\pi uL)}{\pi u}e^{-2\pi iu\tau}$$

2°. Il suffit d'appliquer la formule précédente aux trois portes. On a immédiatement

$$\hat{f}(u) = 2\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}e^{3\pi iu} + \frac{\sin(2\pi u)}{\pi u} - \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}e^{-3\pi iu}$$

IV.

$f'_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$ dont la transfo de Fourier est $\frac{\sin(2\pi u\epsilon)}{\pi u\epsilon}$
On en déduit alors que $\hat{f}_\epsilon(u) = -\frac{i}{2\epsilon}\frac{\sin(2\pi u\epsilon)}{(\pi u)^2}$

2°. Lorsque ϵ tend vers 0 l'expression tend vers $\frac{1}{\pi iu}$ qui est donc la transformée de Fourier de la fonction sign.

V.

Soit $\Delta(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ la fonction triangle et soit $h(t) = \Delta(t-1) + \Delta(t) + \Delta(t+1)$

1°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $h(t)$.

$\Delta(t)$ est la fonction triangle. $\Delta(t-1)$ est la même fonction décalée de 1 vers la droite et $\Delta(t+1)$ est la même fonction décalée de 1 vers la gauche. La somme des trois donne un trapèze nul à l'extérieur de $[-2,2]$ et plat entre $[-1,1]$.

2°. Calculer $\hat{h}(u)$

On rappelle que $\hat{\Delta}(u) = \left(\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2$

$\hat{h}(u) = \left(\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 (1 + e^{i\pi u} + e^{-\pi i u})$

$\left(\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 (1 + 2\cos(\pi u))$

3°. Mêmes questions pour la fonction $f(t) = \Delta(t)^2$

Cette fonction est la fonction tente (tracer sa courbe). On a $\hat{f}(u) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|t|)^2 e^{-2\pi i u t} dt$

Une double intégration par parties donne

$\hat{f}(u) = \dfrac{1}{(\pi u)^3}[\pi u - \sin(\pi u)\cos(\pi u)]$

VI.

Soit $f(t) = e^{-|t|}$, $g(t) = \dfrac{1}{1+(2\pi t)^2}$ et $h(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

1°. $\hat{f}(u) = \dfrac{2}{1+(2\pi u)^2}$ puis

$\hat{g}(u) = \dfrac{1}{2}\hat{\hat{f}}(u) = \dfrac{1}{2}f(-u) = \dfrac{1}{2}e^{-|u|}$

$h(t) = g(\dfrac{t}{2\pi}) \Rightarrow \hat{h}(u) = 2\pi\hat{g}(2\pi u) = \pi e^{-2\pi|u|}$

2°. $\hat{h}(u) = 2\displaystyle\int_0^\infty h(t)\cos(2\pi u t)dt = 2\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi u t)}{1+t^2}dt$

En $u = 1/2\pi$, l'égalité donne $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos t}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2e}$

VII.

1°. $f'(t) = -2\pi t e^{-\pi t^2} \Rightarrow f'(t) + 2\pi t f(t) = 0$ donc f est solution de l'équation.

2°. Par linéarité de la transformée de Fourier, si f est solution de l'équation, alors $\widehat{f'} + 2\pi\widehat{tf} = 0$

$\iff 2\pi i u\hat{f}(u) + 2\pi\dfrac{-1}{2\pi i}\hat{f}'(u) = 0$

$\iff 2\pi i\left[\hat{f}'(u) + 2\pi u\hat{f}(u)\right] = 0 \iff \hat{f}$ est solution de l'équation.

3°. L'équation est une équation linéaire d'ordre 1 et n'admet donc comme solution qu'une famille de fonction définies à une constante multiplicative près. f et $\hat{f}$ ne diffèrent que d'une constante k. $\hat{f}(u) = kf(u)$

Or, $\hat{f}(0) = kf(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}dt$ donc $k=1$ et $\hat{f}(u) = f(u)$

$\Rightarrow$ les gaussiennes sont invariantes par transformation de Fourier.

VIII.

Soient $f(t) = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ et $g(t) = te^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ avec $\lambda > 0$

On considère l'équation différentielle $E:\ y' + \lambda y = f(t)$

1°. Un calcul déjà fait précédemment donne :

$\hat{f}(u) = \dfrac{1}{\lambda + 2\pi i u}$ et $\hat{g}(u) = \dfrac{1}{(\lambda + 2\pi i u)^2}$

2°. $f * f(t) = g(t)$ après calcul.

3°. Soit y une solution de l'équation ; Alors

$\widehat{y'}(u) = 2\pi i u \times \hat{y}(u) \Rightarrow y = \dfrac{1}{(\lambda + 2\pi i u)^2} = \hat{g}(u)$

par unicité de la transformée de Fourier, on a $y(t) = g(t)$ qui est solution de l'équation.

IX.

1°. $\widehat{y'}(u) + \hat{y}(u) = \hat{g}(u) \Rightarrow \hat{y}(u) = \dfrac{\hat{g}(u)}{1+2\pi i u}$

2°. La solution est la transformée de Fourier inverse de la fonction se trouvant dans le membre de droite.

3°. On a classiquement $\hat{h}(u) = \dfrac{1}{1+2\pi i u}$

4°. D'après les questions précédentes, $\hat{y}(u) = \hat{g}(u)\hat{h}(u)$, et d'après les propriétés de la convolution, $y(t) = g \star h(t)$

X.

1°. En passant à la transformée de Fourier dans les deux membres, on a $\hat{y}(u) = \dfrac{1}{1+2\pi i u}$. La solution de l'équation est donc $y(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

2°. En passant à la transformée de Fourier dans les deux membres, on a $\hat{y}(u) = \dfrac{-1}{1+(2\pi u)^2}$. La solution de l'équation est donc la transfo inverse de cette fonction, ie

$y(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-|t|}$

XI.

Considérons les fonctions $f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t)$ et $g(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$

1°. $\hat{f}(u) = \dfrac{\sin \pi u}{\pi u}$

2°. $f * f(t) = g(t) \Rightarrow \hat{g}(u) = \hat{f}(u)^2 = \left(\dfrac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$

3°. $\hat{\phi}(u) = \left(\dfrac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^4$

XII.

1°. $\Gamma(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt$ représente l'énergie du signal.

2°. $\Gamma(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)f(t+u)dt$ posons $s = t+u$

C'est une fonction paire $\Gamma(u) = \Gamma(-u)$ avec $|\Gamma(u)| \leq \Gamma(0)$

3°. La formule de Parseval donne pour deux fonctions f et g

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\bar{\hat{g}}(u)du$

Appliquons cette formule à $f(t)$ et $g(t) = f(t-u)$. Il vient

$\Gamma(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(v)|^2 e^{2\pi i v u}dv$

4°. $f(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \Rightarrow (u) = \dfrac{1}{2}e^{-|u|}$

5°. Cette fonction mesure l'influence de la valeur d'un signal à t sur sa valeur θ instants plus tard.

XIII.

1°. $f*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha(t-u)}e^{-\beta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-u)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)du$
$=e^{-\alpha t}\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-\beta)u}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-u)du$
$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-u)=1\iff t>u$ donc si $t\le 0$, $f*g(t)=0$ et sinon $f*g(t)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

2°. $f(t)=e^{-\pi t^2}\Rightarrow\hat{f}(u)=e^{-\pi u^2}$
$\Rightarrow\widehat{f*f}(u)=\hat{f}(u)^2=e^{-2\pi u^2}=e^{-\pi(u\sqrt{2})^2}$
Nous cherchons $g(t)=f*f(t)$ sachant que $\hat{g}(u)=\hat{f}(u\sqrt{2})$
$\Rightarrow g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}f(\frac{t}{\sqrt{2}})$ Ainsi, $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$

3°. $f(t)=\frac{1}{1+t^2}\Rightarrow\hat{f}(u)=\pi e^{-2\pi|u|}$
$\Rightarrow\widehat{f*f}(u)=\pi^2e^{-4\pi|u|}=\pi^2e^{-2\pi|2u|}$
Nous cherchons $g(t)=f*f(t)/\ \hat{g}(u)=\pi^2e^{-2\pi|2u|}$
$g(t)=\frac{2\pi}{1+t^2}$

XIV.

1°. Soit $\phi(t)=e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ avec $\alpha>0$
$\hat{\phi}(u)=\frac{1}{\alpha+2\pi iu}$

2°. Par récurrence :
$\phi*\phi(t)=te^{-\alpha t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$
Hypothèse de récurrence : $\phi_n(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$
Alors $\phi_{n+1}(t)=\frac{e^{-\alpha t}}{(n-1)!}\int_0^t v^{n-1}dv=\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

3°. $\hat{\phi}_n(u)=\hat{\phi}(u)^n=\frac{1}{(\alpha+2\pi iu)^n}$

XV. Soient $h_n=\mathbb{1}_{[-n,n]}*\mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $\phi_n(t)=\frac{\sin(2\pi t)\sin(2\pi nt)}{(\pi t)^2}$

1°. Calculer $\widehat{h_n}$ et en déduire que $\widehat{\phi_n}(u)=h_n(u)$

On sait que la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ est $\frac{\sin(2\pi u)}{\pi u}$. De même, celle de $\mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$ est $2n\frac{\sin(2\pi nu)}{2\pi nu}$.
Ainsi, $\widehat{h_n}(u)=\frac{\sin(2\pi u)}{\pi u}2n\frac{\sin(2\pi nu)}{2\pi nu}$
En appliquant la transformation inverse de Fourier, on en déduit que la transformée de $\frac{\sin(2\pi nt)\sin(2\pi t)}{(\pi t)^2}$ est $h_n(u)$.

2°. Etudier les fonctions h_n

Le produit de convolution des fonctions indicatrices donne (après calcul) une fonction nulle à l'extérieur de $[-n-1,n+1]$, constante et égale à 2 sur $[-n,n]$ et affine sur les intervalles $[-n-1,-n]$ et $[n,n+1]$

XVI.

Considérons l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{l} y'(t)-\alpha y(t)=f(t)\\ y(0)=\beta\end{array}\right.$
avec f absolument intégrable.

Démontrer que la solution de cette équation est
$y(t)=\beta e^{\alpha t}+\int_0^t f(s)e^{\alpha(t-s)}ds$

XVII.

1°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et tracer sa courbe représentative.

$\hat{f}(u)=\int_{-1/2}^{+1/2}e^{-2\pi iut}dt=\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$

Il s'agit bien sûr du sinus cardinal.

2°. Calculer $\hat{\Delta}(u)$ à l'aide d'une intégration par parties. Tracer l'allure des courbes de $\Delta(t)$ et $\hat{\Delta}(u)$.

$\hat{\Delta}(u)=\int_{-1}^{+1}(1-|t|)e^{-2\pi iut}dt=$
$\int_{-1}^0(1+t)e^{-2\pi iut}dt+\int_0^1(1-t)e^{-2\pi iut}dt$
$=\left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2$ par une double intégration par parties.

Courbes :

3°. Démontrer que $\hat{f}(u)^2=\hat{\Delta}(u)$ et en déduire l'expression de $f*f(t)$.

Le résultat est évident : $\hat{f}(u)^2=\hat{\Delta}(u)$ et l'on a donc
$\widehat{f*f}(u)=\hat{\Delta}(u)\iff f*f(t)=\Delta(t)$

4°. Déduire de la question 1° l'expression de $\hat{s}(u)$.

On applique la formule d'inversion de Fourier : $\hat{s}(u)=f(u)$

5°. En utilisant les formules d'Euler, démontrer que

$$\hat{h}(u)=\frac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega)+\hat{s}(u+\omega)\right]$$

On a $h(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\frac{e^{2\pi i\omega t}+e^{-2\pi i\omega t}}{2}$
$=\frac{1}{2}e^{2\pi i\omega t}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}+\frac{1}{2}e^{-2\pi i\omega t}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
En passant à la transformée de Fourier, on a :
$\hat{h}(u)=\frac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega)+\hat{s}(u+\omega)\right]$

6°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\hat{h}(u)$.

Il s'agit d'une double porte symétrique autour de zéro

7°. On s'intéresse à la technique de transmission par modulation d'amplitude. Si ω est la pulsation du signal porteur et $s(t)$ est le signal à transmettre, expliquer la forme de la courbe de $\hat{h}(u)$.

XVIII.

Cet exercice plus difficile peut être laissé de côté, sauf si vous vous entraînez pour les concours.

1°. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikx}dx=0$ si $k\neq 0$ et 1 sinon.
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(x)dx=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikx}dx$
$\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(x)dx=1$

2°. $D_n(x)=e_0(x)+\sum_{k=1}^{n}e_k(x)+\sum_{k=-1}^{-n}e_k(x)$
$=1+\sum_{k=1}^{n}(e_k(x)+e_{-k}(x))=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$

D_n est réelle, paire et 2π-périodique.

Posons $z = e^{ix}$, on a $z\bar{z} = 1$ et
$D_n(x) = \dfrac{1 - z^{-n}}{z - 1} - \dfrac{1 - z^{n+1}}{z - 1} = z^{n+1}\dfrac{1 - z^{-2n-1}}{z - 1}$
$= \dfrac{z^{(2n+1)/2} - z^{-(2n+1)/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$
Si $x = 2k\pi \Rightarrow D_n(x) = 1 + 1 + ... + 1 = 2n + 1$

3°. $f * e_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{in(x-t)}dt = c_n e_n(x)$

$f * D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} f * e_k(x) = S_n(x)$ par linéarité de l'intégrale.

4°. $f * D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$
Posons $u = t - x$ alors :
$S_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(-u)du$
et puisque f et D_n sont 2π-périodiques,
$S_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du$
$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]\, D_n(u)du$

5°. $S_n(x) - f(x) = S_n(x) - f(x) \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} du$
$= S_n(x) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$
$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\, D_n(u)du$
$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \phi(u)\sin((2n+1)\frac{u}{2})du$ avec
$\phi(u) = \dfrac{1}{\sin\frac{u}{2}}\, [f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)]$
ϕ est une fonction continue sur $]0, \pi($ et comme f est supposée de classe C^1, $\lim_{u\to 0}\phi(u) = 2f'(x)$
Ainsi, ϕ peut se prolonger par continuité en 0 et π.

6°. Ainsi, ϕ admet un maximum M sur $[0, \pi]$ et l'on a alors
$|S_n(x) - f(x)| \leq \left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} M\sin((2n+1)\frac{u}{2}du\right| \leq \dfrac{M}{(2n+1)\pi}$
Cette valeur tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et ce pour tout x réel ; ainsi, $\lim_{n\to+\infty} S_n f(x) = f(x)$ ce qui démontre le théorème de Dirichlet pour les fonction de classe C^1.

XIX.

Cet exercice est également difficile (et long)...
Le but de ce problème est la résolution de l'équation des ondes à une dimension en utilisant les séries de Fourier.
L'équation des ondes a pour forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)$$

Dans laquelle $v(x,t)$ représente la forme d'une onde au point x et à l'instant t et c représente la célérité de l'onde dans le milieu où elle se propage. Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, c représente la vitesse de la lumière. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles pilotant beaucoup de phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde électromagnétique, d'une onde sonore, vibrations d'une corde, etc. Nous allons prendre comme premier exemple celui d'une corde de guitare que nous supposerons modélisée par un segment de longueur π (afin de pouvoir travailler avec des fonctions 2π-périodiques) attachée à ses deux extrémités et lachée au temps $t = 0$ sans vitesse initiale. Le problème revient alors à déterminer toutes les fonctions $v(x,t)$ de classe C^2 vérifiant en outre les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad v(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \quad v(x,0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1°. Démontrer que la fonction ci-dessous est solution de l'équation :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\psi(x+ct) + \psi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)ds \quad (1)$$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)$
$= \dfrac{1}{2}(\psi'(x+ct) + \psi'(x-ct)) + \dfrac{1}{2c}(\phi(x+ct) - \phi(x-ct))$
$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$
$= \dfrac{1}{2}(\psi''(x+ct) + \psi''(x-ct)) + \dfrac{1}{2c}(\phi'(x+ct) - \phi'(x-ct))$
$\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)$
$= \dfrac{1}{2}(c\psi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)) + \dfrac{c}{2c}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct))$
$\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$
$= \dfrac{1}{2}(c^2\psi''(x+ct) + c^2\psi''(x-ct)) + \dfrac{c}{2}(\phi'(x+ct) - \phi'(x-ct))$

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$
$= \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$ et v est donc solution de l'équation

2°. Expliquer sa forme et le terme d'onde progressive.

v est formée de 2 termes. Le premier est la somme d'une onde se propageant vers les $t > 0$ et d'une onde se propageant vers les $t < 0$, d'où le terme d'onde progressive.

3°. Fixons t et considérons la fonction $x \to v(x,t)$.
Soit $\hat{v}(u,t)$ sa transformée de Fourier. En supposant que l'on peut permuter la dérivation avec l'intégrale (ce qui est faux en rêgle général) démontrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) \times e^{-2\pi iux}dx$$

On a $\hat{v}(u,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)e^{-2\pi iux}dx$
$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(u,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)e^{-2\pi iux}dx$

4°. En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, démontrer que si $v(x,t)$ est solution de l'équation des ondes, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi uc)^2 \times \hat{v}(u,t) = 0$$

En partant de l'équation, on passe à la transformée de Fourier par rapport à la variable x dans les deux membres ; d'après la question précédente et les propriétés de la transformée de Fourier, il vient :

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = (-2\pi iu)^2\hat{v}(u,t)$
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi uc)^2\hat{v}(u,t) = 0$

5°. A u fixé, cette équation est une équation différentielle à variables séparées. La résoudre.

L'équation caractéristique de cette équation est $r^2 + (2\pi uc)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm 2\pi iuc$. Ainsi,

$$\hat{v}(u,t) = \alpha(u)\cos(2\pi uct) + \beta(u)\sin(2\pi uct)$$

où α et β sont des fonctions de u uniquement que l'on peut donc noter $\alpha(u)$ et $\beta(u)$

6°. $v(x,0) = \psi(x) \Rightarrow \hat{v}(u,0) = \hat{\psi}(u) = \alpha(u)$
$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(u,t) = \hat{\phi}(u) = 2\pi uc \times \beta(u) \Rightarrow$

$$\hat{v}(u,t) = \hat{\psi}(u)\cos(2\pi uct) + \frac{\hat{\phi}(u)}{2\pi uc}\sin(2\pi uct)$$

7°. D'après les propriétés des transformées de Fourier, la transformée de Fourier de $x \to \psi(x+ct)$ est $e^{-2\pi iuct}\hat{\psi}(u)$ etcelle de $x \to \psi(x-ct)$ est $e^{-2\pi iuct}\hat{\psi}(u)$.

Enfin, la transfo de $\frac{1}{2c}\mathbb{1}_{[-ct,ct]}(x)$ est
$\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} e^{-2\pi iux}dx = \frac{\sin(2\pi uct)}{2\pi uc}$

8°. La transfo de $x \to (\psi(x+ct) + \psi(x-ct)$ est $2\hat{\psi}(u)\cos(2\pi uct)$ d'après la question précédente. Par ailleurs, la transformée inverse de $\hat{\phi}(u) \times \frac{\sin(2\pi uct)}{2\pi uc}$ est donc $\frac{1}{2c}\mathbb{1}_{[-ct,ct]} \star \phi(x)$
D'où l'expression de la solution cherchée.

XX. Equation de la chaleur.

XXI. Fonction de transfert d'une cellule RC.

1°. On dérive $h(t)$ (facile) et l'on s'aperçoit que $RCh'(t) + h(t) = 0$

2°. Ona $2\pi RCi\hat{v}(u) + \hat{v}(u) = \hat{e}(u)$
$\iff \hat{v}(u) = \frac{1}{1+2\pi RCiu} \times \hat{e}(u)$
En passant à la transformée inverse, il vient immédiatement $v(t) = h * e(t)$

3°. Si $e(t) = \delta(t)$, $\hat{e}(u) = 1$ et donc $v(t) = h(t)$: c'est la réponse impulsionnelle du système.

XXII.

Le corrigé arrive...

XXIII.

Le corrigé arrive...

XXIV.

Le corrigé arrive...