Transformation de Fourier

I.
Calculer les transformées de Fourier des fonctions ci dessous ($\alpha > 0$).

1°. $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t)$ 2°. $e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ 3°. $e^{-\alpha|t|}$ 4°. $(1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ 5°. $t^2\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$

6°. $\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ 7°. $\mathbb{1}_{[-1,0]}(t)$ 8°. $t\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t)$ 9°. $\cos(2\pi t)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ 10°. $\frac{t^k}{k!}e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

II.

On considère la fonction $\phi(t) = a\mathbb{1}_{]-a,a[}(t) + (2a-|t|)\mathbb{1}_{[a,2a]}(|t|)$

1°. Tracer soigneusement la courbe de $\phi(t)$.
2°. Déterminer $\phi'(t)$ et calculer sa transformée de Fourier.
3°. En déduire $\widehat{\phi}(u)$

III.

1°. Déterminer la transformée de Fourier d'une fonction porte centrée en τ, de largeur $L > 0$ et de hauteur h.
2°. Soit $f(t) = 2 \times \mathbb{1}_{[-2,-1]}(t) + \mathbb{1}_{]-1,1]}(t) - \mathbb{1}_{]1,2]}(t)$. Tracer $f(t)$ et calculer $\hat{f}(u)$.

IV.
On considère les fonctions f_ϵ et sign définies par

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < -\epsilon \\ t/\epsilon & \text{si } -\epsilon \le t \le \epsilon \\ 1 & \text{si } t > \epsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1°. Déterminer $f'_\epsilon(t)$ et $\widehat{f'}_\epsilon(u)$

2°. Calculer $\lim_{t\to 0} f'_\epsilon(t)$. En déduire $\widehat{\text{sign}}(u)$.

V.
Soit $\Delta(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ la fonction triangle et soit $h(t) = \Delta(t-1) + \Delta(t) + \Delta(t+1)$

1°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $h(t)$.
2°. Calculer $\hat{h}(u)$
3°. Mêmes questions pour la fonction $f(t) = \Delta(t)^2$

VI.
Soit $f(t) = e^{-|t|}$, $g(t) = \dfrac{1}{1+(2\pi t)^2}$ et $h(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

1°. Calculer $\hat{f}(u)$ puis $\hat{g}(u)$; en déduire $\hat{h}(u)$.

2°. En utilisant la parité de h, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt$

VII.
Soit $f(t) = e^{-\pi t^2}$. On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$

1°. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2\pi t \times y = 0$.
2°. Résoudre cette équation différentielle et montrer que $\hat{f}$ en est aussi solution.
3°. En déduire que f et $\hat{f}$ ne diffèrent que d'une constante que l'on calculera.
4°. Calculer alors $\hat{f}$.

VIII.
Soient $f(t) = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ et $g(t) = te^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ avec $\lambda > 0$

On considère l'équation différentielle $\bullet$: $y' + \lambda y = f(t)$

1°. Calculer $\hat{f}(u)$ et $\hat{g}(u)$
2°. En déduire $f * f(t)$
3°. Résoudre l'équation différentielle •

IX.
Considérons l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = g(t)$ où g est une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et y est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1°. Déterminer une équation dont $\hat{y}(u)$ est solution.
2°. Montrer qu'il existe au plus une solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui tende vers 0 en l'infini.
3°. Soit $h(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$. Calculer $\hat{h}(u)$.
4°. Montrer que $g * h(t)$ est la solution recherchée.

X.

Soit $\delta(t)$ la masse de Dirac en 0 et $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{2\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$ pour $\epsilon > 0$

1°. Rappeler le calcul de $\widehat{\delta_0}(u)$.
2°. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = \delta(t)$
3°. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - y(t) = \delta(t)$

XI.

Considérons les fonctions $f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]}(t)$ et $\Delta(t) = (1 - |t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$
1°. Calculer $\hat{f}(u)$.
2°. Calculer $f * f(t)$ et en déduire $\hat{\Delta}(u)$.
3°. Calculer soigneusement $\phi(t) = \Delta * \Delta(t)$ puis en déduire $\hat{\phi}(u)$.

XII. Fonction d'autocorrélation.

Soit $f(t)$ un signal réel de carré intégrable.

On appelle fonction d'autocorrélation du signal la fonction $\Gamma(u) = \lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{+T} f(t)f(t-u)dt.$

Cette fonction sert à détecter un signal périodique noyé dans un bruit.

1°. Que représente $\Gamma(0)$?
2°. Démontrer que $\Gamma(u)$ est une fonction paire.
3°. Utiliser la formule de Parseval pour exprimer $\Gamma(u)$ en fonction de $\hat{f}$.
4°. Calculer les fonctions d'autocorrélation de $\Pi(t)$ et $e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

XIII.

1°. Calculer $f * g(t)$ avec $f(t) = e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ et $g(t) = e^{-\beta t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
2°. Calculer $f * f(t)$ avec $f(t) = e^{-\pi t^2}$ puis avec $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

XIV.

1°. Soit $\phi(t) = e^{-\alpha t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ avec $\alpha > 0$. Calculer $\hat{\phi}(u)$.
2°. Calculer $\phi_n(t) = \underbrace{\phi * \phi * \ldots * \phi}_{n\times}(t)$.
3°. Exprimer $\hat{\phi}_n(u)$ en fonction de $\hat{\phi}(u)$ et en déduire $\hat{\phi}_n$.

XV. Soient $h_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} * \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $\phi_n(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)\sin(2\pi nt)}{(\pi t)^2}$

1°. Calculer $\widehat{h_n}$ et en déduire que $\widehat{\phi_n}(u) = h_n(u)$
2°. Etudier les fonctions h_n

XVI.
Considérons l'équation différentielle $\begin{cases} y'(t) - \alpha y(t) = f(t) \\ y(0) = \beta \end{cases}$ avec f absolument intégrable.

Démontrer que la solution de cette équation est $y(t) = \beta e^{\alpha t} + \displaystyle\int_0^t f(s)e^{\alpha(t-s)}ds$

XVII. Modulation d'amplitude.

Soient $f(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$, $\Delta(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$, $s(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ et $h(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi\omega t)$ avec $\omega > 0$.

1°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et tracer sa courbe représentative.

2°. Calculer $\hat{\Delta}(u)$ à l'aide d'une intégration par parties. Tracer l'allure des courbes de $\Delta(t)$ et $\hat{\Delta}(u)$.

3°. Démontrer que $\hat{f}(u)^2 = \hat{\Delta}(u)$ et en déduire l'expression de $f * f(t)$.

4°. Déduire de la question 1° l'expression de $\hat{s}(u)$.

5°. En utilisant les formules d'Euler, démontrer que

$$\hat{h}(u) = \frac{1}{2}\left[\hat{s}(u-\omega) + \hat{s}(u+\omega)\right]$$

6°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\hat{h}(u)$.

7°. On s'intéresse à la technique de transmission par modulation d'amplitude. Si ω est la pulsation du signal porteur et $s(t)$ est le signal à transmettre, expliquer la forme de la courbe de $\hat{h}(u)$.

XVIII. Théorème de Dirichlet.

On se propose de démontrer le théorème de Dirichlet pour les fonctions de classe C^1.

On pose $e_k(x) = e^{ikx}$ et

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(x)$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$; c'est le noyau de Dirichlet d'ordre n.
On notera

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\ dt$$

le produit de convolution de deux fonctions 2π-périodiques.

Soit enfin f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)$ son nième polynôme de Fourier.

1°. Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx$ et en déduire $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_n(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2°. Montrer que

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

si $x \neq 2k\pi$ et $2n+1$ sinon.

En déduire que $D_n(x)$ est une fonction réelle, paire et 2π périodique.

3°. Montrer que $f * e_n(x) = c_n e_n(x)$ et que $S_n(x) = f * D_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

4°. Démontrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x+u) + f(x-u))D_n(u)du$ en effectuant un changement de variables.

5°. Montrer que $S_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\phi(u)D_n(u)du$ avec $\phi(u) = (f(x+u) + f(x-u) - 2f(x))\,/\,\sin(\dfrac{u}{2})$

Démontrer que ϕ est une fonction continue sur $[0,\pi]$ et qu'elle admet une maximum M sur cet intervalle.

6°. En déduire que $|S_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{M}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin((2n+1)\dfrac{u}{2})|du$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

7°. Conclure.

XIX. Equation des ondes.

Le but de ce problème est la résolution de l'équation des ondes à une dimension en utilisant la transformation de Fourier. L'équation des ondes a pour forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)$$

Dans laquelle $v(x,t)$ représente la forme d'une onde au point x et à l'instant t et c représente la célérité de l'onde dans le milieu où elle se propage. Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, c représente la vitesse de la lumière. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles pilotant beaucoup de phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde électromagnétique, d'une onde sonore, vibrations d'une corde, etc. Le problème revient à déterminer toutes les fonctions $v(x,t)$ de classe C^2 vérifiant en outre les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad v(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \quad v(x,0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1°. Démontrer que la fonction ci-dessous est solution de l'équation :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\psi(x+ct) + \psi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)ds \quad (1)$$

2°. Expliquer sa forme et le terme d'onde progressive.

3°. Fixons t et considérons la fonction $x \to v(x,t)$.
Soit $\hat{v}(u,t)$ sa transformée de Fourier. En supposant que l'on peut permuter la dérivation avec l'intégrale (ce qui est faux en rêgle général) démontrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) \times e^{-2\pi iux}dx$$

4°. En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, démontrer que si $v(x,t)$ est solution de l'équation des ondes, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi uc)^2 \times \hat{v}(u,t) = 0$$

5°. A u fixé, cette équation est une équation différentielle à variables séparées. La résoudre et en déduire que

$$\hat{v}(u,t) = \alpha(u)\cos(2\pi uct) + \beta(u)\sin(2\pi uct)$$

où α et β sont des fonctions de u uniquement.

6°. En utilisant les conditions initiales, démontrer que

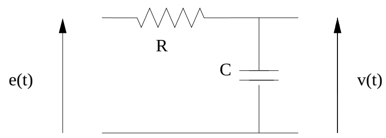
$$\hat{v}(u,t) = \hat{\psi}(u)\cos(2\pi uct) + \frac{\hat{\phi}(u)}{2\pi uc}\sin(2\pi uct)$$

7°. Déterminer la transformée de Fourier des fonctions $x \to \psi(x+ct)$ et $x \to \psi(x-ct)$ en fonction de $\hat{\psi}(u)$ puis déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{2c}\mathbb{1}_{[-ct,ct]}(x)$

8°. Déduire des deux questions précédentes la forme générale de la solution trouvée dans l'équation (1)

XX. Equation de la chaleur.

XXI. Fonction de transfert d'une cellule RC.



On considère une cellule RC possédant une tension d'entrée $e(t)$ et un tension de sortie $v(t)$.

On rappelle que $v(t)$ vérifie l'équation différentielle $RCv'(t) + v(t) = e(t) \quad (\star)$

1°. Résoudre l'équation homogène associée et démontrer que $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est solution de cette équation.

2°. On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante. Démontrer que la solution générale de l'équation $(\star)$ peut s'écrire sous la forme

$$v(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\int_{\alpha}^{t} e(s)e^{-\frac{t-s}{RC}}ds$$

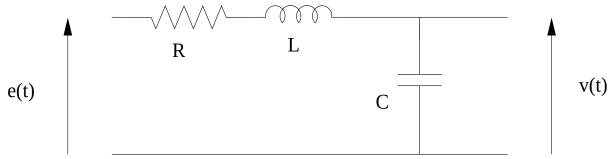
3°. On rappelle qu'un système linéaire vérifie les trois conditions de linéarité, causalité et stationnarité. On suppose par ailleurs que $\lim_{t\to-\infty} v(t) = 0$. Démontrer que ces conditions imposent $k = 0$ et $\alpha \to -\infty$

4°. En déduire que la solution peut s'écrire sous la forme $v(t) = h * e(t)$ et que h est la fonction de transfert du filtre.

5°. Résoudre l'équation $(\star)$ par transformation de Fourier et retrouver le résultat précédent. Comparer les deux méthodes.

3°. Si $e(t) = \delta_0(t)$, déterminer $v(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Même question si $e(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

XXII. Circuit RLC.



On considère un circuit RLC possédant une tension d'entrée $e(t)$ et un tension de sortie $v(t)$.

1°. Démonter que $v(t)$ vérifie l'équation différentielle $LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = e(t)$

2°. Démontrer que $\hat{v}(u) = \hat{e}(u) \times \hat{h}(u)$ avec $\hat{h}(u)^{-1} = -LC(2\pi u)^2 + RC(2\pi iu) + 1$

3°. Posons $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ l'oscillation du circuit et $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ le facteur d'amortissement.

Déterminer le discriminant de l'équation $\hat{h}(u)^{-1} = 0$ en fonction de ω et α et en déduire les solutions de cette équation.

4°. Déterminer $|\hat{h}(u)|$ et tracer la courbe représentative de cette fonction.

5°. On suppose maintenant, pour simplifier les calculs, que $LC = 6$ et $RC = 5$.
Déterminer les racines de l'équation précédente et décomposer en éléments simples $\hat{h}(u)$ (on pourra poser $\omega = 2\pi u$ pendant la décomposition).

6°. En exprimant chaque partie polaire sous la forme $\dfrac{k}{\lambda + 2\pi iu}$, en déduire l'expression de $v(t)$ lorsque $e(t) = \delta(t)$, $\delta(t)$ étant la masse de Dirac en 0 ($s(t)$ est alors la réponse impulsionnelle du circuit). Tracer l'allure de la courbe de $s(t)$.

XXIII. Série et transformée de Fourier.

Soit $\phi(t)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $2T$. On peut alors développer ϕ en série de Fourier :

$$\phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi t/T} \text{ avec } c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi(t)e^{-i\pi kt/T}dt$$

Soit maintenant $f(t)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, mais qui n'est pas périodique.
Définissons une fonction $\phi(t)$ périodique de période $2T$ par $\phi_T(t) = f(t)$ si $-T < t < T$

1°. Exprimer les coefficients de Fourier $c_k(T)$ de $\phi_T(t)$ en fonction de $f(t)$.

Posons, sous réserve d'existence, $\hat{f}(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt$ et posons également $u_k = k\pi/T$

2°. Démontrer que $c_k(T) = \dfrac{1}{2T}\hat{f}(u_k)$, puis que $f(t) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(u_k)e^{iu_k t}$

3°. En faisant tendre T vers l'infini, démontrer que $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)e^{iut}du$

Nous venons ainsi de définir la transformation de Fourier (pour une classe simple de fonctions) et de démontrer la formule d'inversion de Fourier.

Théorie du signal

XXIV. Propriétés des masses de Dirac.

Nous avons déjà défini la masse de Dirac δ_0 comme étant un objet mathématique (on ne peut pas dire une fonction) caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \\ \delta_0(t) = 0 \iff t \neq 0 \end{cases}$$

On peut également définir la masse de Dirac comme étant l'élément neutre du produit de convolution : $f * \delta_0 = f$

La masse de Dirac est en fait une distribution (cf. cours sur la théorie du signal) qui représente une impulsion.

1°. Démontrer que ces deux définitions sont équivalentes.

2°. Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_0(t)dt = f(0)$

3°. En notant $\delta_{t_0}(t) = \delta_0(t - t_0)$ démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_{t_0}(t)dt = f(t_0)$

4°. Démontrer que la fonction $e^{2\pi\omega it}$ n'admet pas de transformée de Fourier au sens où nous l'avons définie dans le cours.

5°. Soit $f(t)$ une fonction admettant pour transformée de Fourier $\hat{f}(u)$.

Déterminer la transformée de $f(t)e^{2\pi\omega it}$. En déduire celle de $g(t) = f(t)\cos(2\pi\omega t)$ et démontrer que $\hat{g} = \hat{f} * \dfrac{1}{2}\left(\delta_\omega + \delta_{-\omega}\right)$

XXV. Formule de Poisson et théorème de Shannon.