MATHEMATIQUES TD N°9 : SERIE - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Nature des séries de terme général :

CV = converge DV = diverge

1°. $\frac{1}{n^2}$ série à termes positifs.
$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc $\sum u_n$ CV

2°. $\frac{1}{n(n+1)}$ série à termes positifs.
$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ CV d'après le critère d'équivalence.

3°. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ série à termes positifs.
$\sum_{k=1}^{n} = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$ si $n \to +\infty$ donc $\sum u_n$ DV

4°. e^{-n} série à termes positifs.
$n^2 u_n \to 0$ si $n \to +\infty$, donc $\exists N : \forall n > N,\ u_n < \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ CV d'après le critère de majoration.

5°. $\frac{n^2+n-2}{n^4-3n}$ série à termes positifs si n assez grand.
$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ CV d'après le critère d'équivalence.

6°. $\frac{n^n}{2^n}$ série à termes positifs.
$u_n^{1/n} = n/2 \to +\infty$ donc $\sum u_n$ DV d'après le critère de Cauchy.

7°. $(\frac{2n+1}{3n-2})^n$ série à termes positifs.
$u_n^{1/n} = \frac{2n+1}{3n-2} \to \frac{2}{3} < 1$ donc $\sum u_n$ CV d'après le critère de Cauchy.

8°. $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ série à termes positifs.
$u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ DV

9°. $\frac{\ln n}{n^2+1}$ série à termes positifs.
$\ln n \leq \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$. Donc $u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ donc $\sum u_n$ CV (critère d'équivalence et de majoration).

10°. e^{-n^2} série à termes positifs.
On peut utiliser à peu près tous les critères. Par exemple, le critère de Cauchy montre que $u_n^{1/n} = e^{-n} \to 0 < 1$ donc $\sum u_n$ CV

11°. $\frac{1}{C_{2n}^n}$ série à termes positifs.

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!^2}$ et en utilisant le critère de D'Alembert,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$ donc $\sum u_n$ CV

12°. $\frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$ série à termes positifs.
$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ donc $\sum u_n$ CV

13°. $\frac{1}{n \ln n}$série à termes positifs si $n \geq 2$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Cette fonction est positive et décroissante et l'intégrale diverge car la primitive est en $\ln \ln x$. D'après le critère de comparaison à une intégrale, la série DV

14°. $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$série à termes positifs.
$u_n^{1/n} = (\frac{n}{n+1})^n \to e^{-1} < 1$ donc la série CV d'après le critère de Cauchy.

15°. $\cos \frac{1}{n}$ série à termes positifs.
$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 \neq 0$ donc $\sum u_n$ CV

16°. $\sin \frac{1}{n}$ série à termes positifs (à prouver !).
$u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ DV

17°. $(-1)^n \sin \frac{1}{n}$ série alternée.
$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ est une fonction positive si $x \in]0,1]$ et est décroissante. Elle tend vers 0 et par conséquent le critère des séries alternées s'applique, ie $\sum u_n$ CV

18°. $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ série alternée.
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est une fonction positive et décroissante pour n assez grand. En outre elle tend vers 0 en $+\infty$; le critère des séries alternées s'applique, ie $\sum u_n$ CV

19°. $(\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha}$
Il est nécessaire d'utiliser des développements limités :
$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{2n^2})$
$u_n = \exp\left(n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))\right) = e^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}(1+\epsilon(\frac{1}{n}))}$

- si $\alpha < 2$ $u_n \to 1 \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ DV
- si $\alpha = 2$ $u_n \to 1 \neq e^{-1/2} \Rightarrow \sum u_n$ DV
- si $\alpha > 2$ $n^2 u_n = \exp\left(-n^{\alpha-2}(2\frac{\ln n}{n^{\alpha-2}} + \frac{1+\epsilon}{2})\right) \to 0$

donc il existe un rang au-delà duquel $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum u_n$ CV

20°. $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n} \ln n}$ série alternée.
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{x} \ln x}$ est de classe C^∞ et l'on peut démontrer (à vous de le faire) que f est décroissante et tend vers 0 en l'infini. Le critère des séries alternées d'applique et $\sum u_n$ CV

21°. $\frac{n^n}{n!}$ série à termes positifs.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1 + 1/n)^n \to e > 1$ donc $\sum u_n$ DV

22°. $\frac{(-1)^n}{n \ln n}$ série alternée $\sum u_n$ CV

23°. $\dfrac{n^2}{2^n}$ série à termes positifs.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^2 \to \dfrac{1}{2} < 1 \sum u_n$ CV

24°. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ $u_n \sim n \Rightarrow \sum u_n$ CV

25°. $\ln(1+\dfrac{1}{n^3})$ série à termes positifs.
$u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$ donc $\sum u_n$ CV

26°. $\dfrac{\sqrt{n}}{n!}$ série à termes positifs.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \to 0 < 1$ donc $\sum u_n$ CV

27°. $\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ série à termes positifs.
$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ a pour primitive $F(x) = 2\sqrt{\ln x}$ qui tend vers l'infini. D'après le critère de comparaison à une intégrale, $\sum u_n$ DV

28°. $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^2+\ln n}$ série à termes positifs.
$u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum u_n$ DV

29°. $(\ln n)^n(\sin\dfrac{1}{n})^\alpha$

30°. $(-1)^n(\ln n)^n(\sin\dfrac{1}{n})^{1/3}$

31°. $1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

32°. $(\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$

33°. $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$

34°. $\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{2n+1})$

35°. $\ln\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}$

36°. $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$

II. Suite d'intégrales

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°. Calculer I_0 et I_1.

$I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_1 = -\ln\cos x\rfloor_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{2}\ln 2$

2°. Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+2}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

$I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx$
$= \dfrac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\rfloor_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{n+1}$
Ainsi, $(I_n + I_{n+2}) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et comme $I_n > 0$, ceci montre que $I_n \to 0$

3°. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On dispose de n relations $I_{2n-1} + I_{2n+1} = \frac{1}{2n}$ à multiplier chacune par $(-1)^n$ pour obtenir
$I_1 + I_{2n+1} = \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{(-1)^n}{n})$
Comme I_n tend vers 0, en passant à la limite il vient
$I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1} = \dfrac{1}{2}\ln 2$

III. La formule de Stirling

Considérons la suite $S_n = \ln\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ pour $n > 0$, posons $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\alpha_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1°. Montrer que la série de terme général u_n converge et en déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

On peut considérer u_n comme le terme général d'une série $\sum u_n$ dont on va étudier la somme partielle S_n :
$u_n = S_n - S_{n-1} = \ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\dfrac{(n-1)!e^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)}\sqrt{n-1}}\right)$
$= \ln n! - \ln(n-1)! + n\ln e - (n-1)\ln e - n\ln n - \dfrac{1}{2}\ln n$
$= 1 - (n-\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})) = \dfrac{1}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$
De sorte que la série converge.

2°. Notons $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n < \infty$
Puisque exp est continue, alors
$k = e^\alpha = \lim e^{S_n} = \lim\dfrac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}$
Ainsi $n! \sim kn^n\sqrt{n}e^{-n}$

Nous allons calculer la valeur de cette constante en utilisant les intégrales de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t\ dt$

3°. 4°. Calculer I_0 et I_1 et démontrer que $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}\ \forall n \geq 1$.

$I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ et par récurrence $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$
On a alors $I_{2p} = \dfrac{1\times 3\times ...\times(2p-1)}{2\times 4\times ...\times(2p)}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\dfrac{\pi}{2}$ et
$I_{2p+1} = \dfrac{2\times 4\times ...\times(2p)}{1\times 3\times ...\times(2p+1)} = \dfrac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}$

5°. 6°. Démontrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante, convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

On a $0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow (I_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive et décroissante. Elle est donc convergente. La décroissance montre que $1 \geq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geq \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \geq \dfrac{n}{n+1}$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$
Par ailleurs, $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \dfrac{2}{\pi(2p+1)}\times\left(\dfrac{2.4...2p}{1.3...2p-1}\right)^2 \to 1$
Donc $\sqrt{2}\pi(2p+1).\dfrac{2.4...2p}{1.3...2p-1} \to 1$ donc
$\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{2^{2p}p!^2}{\sqrt{p}(2p)!} = \sqrt{\pi}$ qui s'appelle formule de Wallis.

7°. Posons $S_n = \ln\alpha_n$ avec $\alpha_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$
$\alpha_{2n} = \dfrac{(2n)!e^{2n}}{2^{2n}n^{2n}\sqrt{2n}}$ et $\alpha_n^2 = \dfrac{n!^2e^{2n}}{n^{2n}.n}$ de sorte que
$\dfrac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\dfrac{2^{2n}n!^2}{(2n)!} \Rightarrow \dfrac{2^{2p}p!^2}{\sqrt{p}(2p)!} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\alpha_p^2}{\alpha_{2p}}$

Mais $\alpha_n \to \alpha$ donc $\alpha_{2n} \to \alpha$ et $\alpha_n^2 \to \alpha^2$ le quotient des deux tend vers α. Ainsi, $\sqrt{2\pi} = \alpha$ et l'on a la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times n^n e^{-n}$$

IV. La constante d'Euler

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ $\forall n \geq 1$

1°. Montrer que S_n est la somme partielle de la série de terme général u_n

C'est la définition de la somme partielle d'une série numérique !

2°. Montrer que $u_n = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

3°. D'après la question précédente, la série converge vers une limite γ

4°. Montrer que $\frac{1}{n} \leq S_n \leq 1$ $\forall n$ et en déduire que $\gamma \in]0,1[$

Comme $\frac{1}{x}$ est > 0 et décroissant, on a

$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq S_n < 1 \Rightarrow \gamma \in]0,1[$

V. Somme de séries.

Etudier la convergence des séries numériques $\sum u_n$ ci-dessous. Lorsqu'elles sont convergentes, calculer leur somme.

1°. $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$

2°. $u_n = e^{-n}$

3°. $u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$

4°. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

5°. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

6°. $u_n = \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$

7°. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} n^2 \right)$

8°. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right)$

9°. $u_n = \cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}$

VI.

Soit $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

1°. Calculer I_1.

2°. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x}\, dx$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

3°. Montrer que $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$, $\forall n > 0$, puis que $S_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

4°. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

5°. Reprendre l'exercice avec $J_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x\, dx$ pour calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

VII.

Soit $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-x)^{n-1}$ avec $x \neq 1$.

1°. Démontrer que $S_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$ $(\bullet)$

2°. Déduire que $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

3°. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1]$, $-x^n \leq \frac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n$

4°. En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

VIII.

On pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$ pour $t \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1°. En exprimant $C_n(t) + iS_n(t)$ sous la forme d'une série géométrique, démontrer que si $t \neq 0$,

$$C_n(t) = \frac{\sin(\frac{nt}{2})\cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

et que $C_n(0) = n$. C_n est-elle continue sur $[0,\pi]$?

2°. En déduire que $1 + 2C_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$

Démontrer que cette fonction peut être prolongée par continuité en une fonction g_n continue sur $[0,\pi]$

3°. Montrer que $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$ et en déduire que $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t)\, dt$

4°. Montrer que $\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t)\, dt$

5°. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(0) = 2$ et si $t \neq 0$, $f(t) = \frac{t - t^2/(2\pi)}{\sin(t/2)}$

Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$ et en déduire l'existence d'une constante M telle que $0 \leq f(t) \leq M$ $\forall\, x \in [0,\pi]$

6°. Montrer que $\left|\int_0^\alpha f(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\ dt\right| \leq \alpha M$

7°. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\alpha, \pi]$ et en déduire l'existence d'une constante M' telle que $|f'(t)| \leq M'$
$\forall\ x \in [\alpha, \pi]$

8°. On pose $I_n = \displaystyle\int_\alpha^\pi f(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\ dt$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ en intégrant par parties.

9°. En déduire, enfin, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

IX. Construction d'un obélisque.

On souhaite construire un obélisque en emplilant une infinité de cubes de pierre. Le premier fait 1 m de côté, le second 1/2 m, le troisième 1/3 m etc. Soit H la hauteur de l'édifice, S sa surface (somme des surfaces des cubes) et V son volume. Déterminer H, S et V.

X. Le flocon fractal de Von Koch. (1904)

Partant d'un triangle équilatéral de côté 1 cm, on coupe chacun des côtés en trois parties égales et l'on remplace dans chaque partie le segment central par deux segments de même longueur qui forment un nouveau triangle équilatéral. On recommence la même opération à chaque étape suivante (cf. fig).
La figure obtenue après une infinité d'étapes s'appelle le flocon de Von Koch. Nous allons établir quelques propriétés très simples de cet objet.

Commençons par quelques notations. A l'étape n, nous noterons :
K_n le flocon, u_n le nombre de côtés de K_n, λ_n la longueur de chaque côté, π_n le périmètre de K_n et α_n son aire.

1°. Calculer u_0, λ_0, α_0, u_1, λ_1, α_1.
2°. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire u_n en fonction de n.
3°. Exprimer λ_{n+1} en fonction de λ_n et en déduire λ_n en fonction de n.
4°. Exprimer π_n en fonction de λ_n et de u_n, puis uniquement en fonction de n.
5°. Montrer que $\forall n \geq 0$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times (\frac{4}{9})^n$
6°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.
7°. A partir de quel rang n le périmètre du flocon est-il supérieur à 100 km