MATHEMATIQUES TD N°9 : SERIES NUMERIQUES

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Nature des séries de terme général :

1°. $\frac{1}{n^2}$ 2°. $\frac{1}{n(n+1)}$ 3°. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 4°. e^{-n} 5°. $\frac{n^2+n-2}{n^4-3n}$

6°. $\frac{n^n}{2^n}$ 7°. $(\frac{2n+1}{n^4-3n})^n$ 8°. $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 9°. $\frac{\ln n}{n^2+1}$ 10°. e^{-n^2}

11°. $\frac{1}{C_{2n}^n}$ 12°. $\frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$ 13°. $\frac{1}{n\ln n}$ 14°. $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ 15°. $\cos\frac{1}{n}$

16°. $\sin\frac{1}{n}$ 17°. $(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 18°. $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 19°. $(\cos\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ 20°. $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\ln n}$

21°. $\frac{n^n}{n!}$ 22°. $\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 23°. $\frac{n^2}{2^n}$ 24°. $\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ 25°. $\ln(1+\frac{1}{n^3})$

26°. $\frac{\sqrt{n}}{n!}$ 27°. $\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ 28°. $\frac{n\sqrt{n}}{n^2+\ln n}$ 29°. $(\ln n)^n(\sin\frac{1}{n})^\alpha$ 30°. $(-1)^n(\ln n)^n(\sin\frac{1}{n})^{1/3}$

31°. $1-\cos\frac{\pi}{n}$ 32°. $(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ 33°. $\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ 34°. $\ln(1+\frac{(-1)^n}{2n+1})$ 35°. $\ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}})$

36°. $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$

II. Suite d'intégrales

On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n dx$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1°. Calculer I_0 et I_1.

2°. Pour $n\geq 0$, calculer I_n+I_{n+2} et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

III. La formule de Stirling

Considérons la suite $S_n=\ln\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ pour $n>0$, posons $u_n=S_n-S_{n-1}$ et $\alpha_n=\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.
1°. Montrer que la série de terme général u_n converge et en déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
2°. En déduire qu'il existe une constante k positive telle que $n!\sim kn^n\sqrt{n}e^{-n}$

Nous allons calculer la valeur de cette constante en utilisant les intégrales de Wallis $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t\ dt$

3°. Calculer I_0 et I_1 et démontrer que $I_{n+1}=\frac{n}{n+1}I_{n-1}\ \forall n\geq 1$.

4°. En déduire que $I_{2p}=\frac{1\times 3\times ...\times(2p-1)}{2\times 4\times ...\times(2p)}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1}=\frac{2\times 4\times ...\times(2p)}{1\times 3\times ...\times(2p+1)}=\frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}$

5°. Démontrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante, convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

6°. En déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{2^{2p}p!^2}{\sqrt{p}(2p)!}=\sqrt{\pi}$

7°. Calculer $\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ et utiliser les questions précédentes pour démontrer la formule de Stirling :

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\times n^n e^{-n}$$

IV. La constante d'Euler

Soit $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ et $u_n=S_n-S_{n-1}\ \forall n\geq 1$

1°. Montrer que S_n est la somme partielle de la série de terme général u_n

2°. Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$

3°. En déduire que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite γ

4°. Montrer que $\dfrac{1}{n} \leq S_n \leq 1\ \forall n$ et en déduire que $\gamma \in]0,1[$

V. Somme de séries.

Etudier la convergence des séries numériques $\sum u_n$ ci-dessous. Lorsqu'elles sont convergentes, calculer leur somme.

1°. $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ 2°. $u_n = e^{-n}$ 3°. $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$ 4°. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

5°. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ 6°. $u_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$ 7°. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} n^2 \right)$ 8°. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \right)$

9°. $u_n = \cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}$

VI.

Soit $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

1°. Calculer I_1.

2°. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3°. Montrer que $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$, $\forall n > 0$, puis que $S_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$

4°. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

5°. Reprendre l'exercice avec $J_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{x}\,dx$ pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$

VII.

Soit $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-x)^{n-1}$ avec $x \neq 1$.

1°. Démontrer que $S_n(x) = \dfrac{1-(-x)^n}{1+x}$ $(\bullet)$

2°. Déduire que $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(-x)^n}{1+x}\,dx = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$

3°. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ x \in [0,1]$, $-x^n \leq \dfrac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n$

4°. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$

VIII.

On pose $C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$ pour $t \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1°. En exprimant $C_n(t) + iS_n(t)$ sous la forme d'une série géométrique, démontrer que si $t \neq 0$,

$$C_n(t) = \frac{\sin(\frac{nt}{2})\cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

et que $C_n(0) = n$. C_n est-elle continue sur $[0,\pi]$?

2°. En déduire que $1 + 2C_n(t) = \dfrac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$

Démontrer que cette fonction peut être prolongée par continuité en une fonction g_n continue sur $[0,\pi]$

3°. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$ et en déduire que $\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t)\,dt$

4°. Montrer que $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t)\,dt$

5°. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(0)=2$ et si $t\neq 0$, $f(t)=\dfrac{t-t^2/(2\pi)}{\sin(t/2)}$

Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$ et en déduire l'existence d'une constante M telle que $0\leq f(t)\leq M\ \forall\ x\in[0,\pi]$

6°. Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^\alpha f(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\ dt\right|\leq \alpha M$

7°. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\alpha,\pi]$ et en déduire l'existence d'une constante M' telle que $|f'(t)|\leq M'$ $\forall\ x\in[\alpha,\pi]$

8°. On pose $I_n=\displaystyle\int_\alpha^\pi f(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\ dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=0$ en intégrant par parties.

9°. En déduire, enfin, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

IX. Construction d'un obélisque.

On souhaite construire un obélisque en emplilant une infinité de cubes de pierre. Le premier fait 1 m de côté, le second 1/2 m, le troisième 1/3 m etc. Soit H la hauteur de l'édifice, S sa surface (somme des surfaces des cubes) et V son volume. Déterminer H,S et V.

X. Le flocon fractal de Von Koch. (1904)

Partant d'un triangle équilatéral de côté 1 cm, on coupe chacun des côtés en trois parties égales et l'on remplace dans chaque partie le segment central par deux segments de même longueur qui forment un nouveau triangle équilatéral. On recommence la même opération à chaque étape suivante (cf. fig).
La figure obtenue après une infinité d'étapes s'appelle le flocon de Von Koch. Nous allons établir quelques propriétés très simples de cet objet.

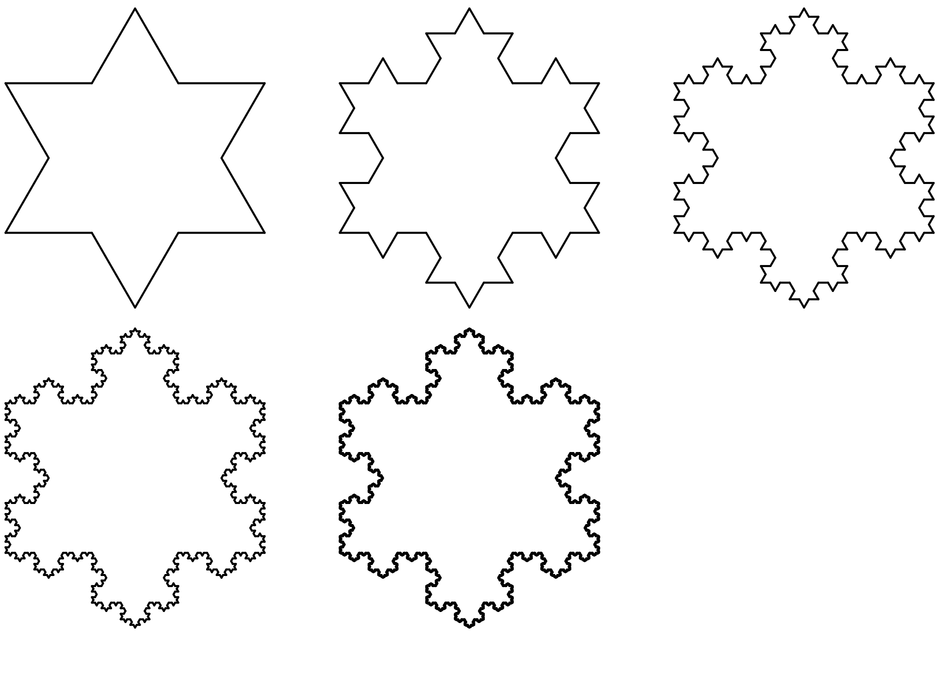

Figure 1 – Flocon pour $n=1,2,3,4$ et 6

Commençons par quelques notations. A l'étape n, nous noterons :
K_n le flocon, u_n le nombre de côtés de K_n, λ_n la longueur de chaque côté, π_n le périmètre de K_n et α_n son aire.

1°. Calculer u_0, λ_0, α_0, u_1, λ_1, α_1.
2°. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire u_n en fonction de n.
3°. Exprimer λ_{n+1} en fonction de λ_n et en déduire λ_n en fonction de n.
4°. Exprimer π_n en fonction de λ_n et de u_n, puis uniquement en fonction de n.
5°. Montrer que $\forall n\geq 0$, $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\times(\dfrac{4}{9})^n$
6°. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\pi_n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$.
7°. A partir de quel rang n le périmètre du flocon est-il supérieur à 100 km