Séries entières.

I. Calculer les rayons de convergence :

1°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ 2°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ 3°. $\sum_{n\geq 0} z^n$ 4°. $\sum_{n\geq 0} n^4 3^n z^n$ 5°. $\sum_{n\geq 1} (\frac{n-1}{n})^{n^2} z^n$

6°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ 7°. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ 8°. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ 9°. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!^2}{(2n)!} z^n$ 10°. $\sum_{n\geq 0} (3n+1) z^{3n}$

11°. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+2}}{8^{n+1}}$ 12°. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$ 13°. $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$ 14°. $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n$ 15°. $\sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^n z^n$

16°. $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} z^n$ 17°. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!^2}{(2n)!} z^n$

II. Développer en série entière :

1°. $\frac{1}{1-x}$ 2°. $\frac{1}{1+x}$ 3°. $\frac{1}{1-2x}$ 4°. $\frac{1}{1-x}$ 5°. $\frac{x}{1-x}$ 6°. $\ln(1-x)$

7°. $\ln(1+x)$ 8°. $\ln(1+3x)$ 9°. $\frac{1}{(1-x)^2}$ 10°. $\frac{1}{(1-x)^3}$ 11°. $\frac{1}{1+x^2}$ 12°. $\arctan x$

13°. $\cos x$ 14°. $\sin x$ 15°. $\cosh x$ 16°. $\sinh x$ 17°. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 18°. $\arcsin x$

19°. e^x 20°. e^{-x^2} 21°. $e^{-x}\sin x$ 22°. $\frac{1}{1-x^2}$ 23°. $\frac{1}{1-x^5}$ 24°. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$

III. Utilisation du Lemme d'Abel.

1°. En développant $\ln(1-x)$ au voisinage de 0, calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

2°. En développant $arctan(x)$ calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ puis $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

3°. En développant e^x et e^{-x}, calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$

4°. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^n$ et l'on note $f(x)$ sa somme

Déterminer le rayon de convergence, l'expression de $f(x)$ puis la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

IV. Dérivation et intégration de séries entières.

1°. On considère la série $\sum_{n\geq 0} (2x)^n$ et l'on note $S(x)$ sa somme.

1.1. Déterminer son rayon de convergence et donner l'expression de $S(x)$

1.2. Calculer $S'(x)$ et donner son développement au voisinage de 0. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$

2°. On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$

2.1. Montrer que I est convergente (on pourra poser $t = 1-u$) et calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{n}$

2.2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \ \forall x < 1$. En déduire la valeur de I.

3°. Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$.

3.1. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de $x = 0$ ainsi que son rayon de convergence.

3.2. Montrer que $f(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

3.3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

V. Exponentielle complexe.

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$.

1°. Déterminer le développement en série entière de $h(x) = f(x) + ig(x)$

2°. En déduire celui de $f(x)$ et de $g(x)$.

VI. Somme de série.

1°. Effectuer le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

2°. Montrer que $\displaystyle\int_0^u \frac{x^p}{x+2}dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p+1)\times 2^n}u^{n+p+1}$, $u \in]0, 2[$ $p \in \mathbb{N}$

3°. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}$

VII. Suites et séries entières.

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $\begin{cases} u_n = u_{n-1} \times \cos\dfrac{\pi}{2^n} \\ u_2 = \cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ et soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $v_n = u_n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$

1°. Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et que $u_n = \dfrac{2}{2^n \sin(\pi/2^n)}$

2°. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

3°. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n z^n$ ainsi que l'expression de sa somme.

VIII. Application aux équations différentielles.

Déterminer les solutions des équations différentielles ci dessous qui sont développables en séries entières :

1°. $y' - y = 0$	2°. $xy' - (x-2)y - 1 = 0$	3°.	4°.
5°. $x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$	6°. $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$	7°.	8°.

IX. Série génératrice.

On appelle série génératrice d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n x^n$

On considère la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$ et l'on note $\phi(x)$ sa fonction génératrice.

On pose enfin $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

1°. Démontrer que $\phi(x)$ vérifie l'équation $\phi(x) = 1 + x\phi(x) + x^2\phi(x)$

2°. En déduire une expression simple de $\phi(x)$ sous forme de fraction rationnelle.

3°. Décomposer cette fraction en éléments simples et déduire que $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$

X. Famille d'équations différentielles.

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = C_{2n}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ sa fonction génératrice.

Considérons les équations différentielles :

$$\begin{aligned} &(1-4x)y'(x) - 2y(x) = 0 \quad &(H) \\ &(1-4x)y'(x) - 2y(x) = x^n \quad &(E_n) \end{aligned}$$

1°. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(x)$.

2°. Déterminer la dérivée de cette série et montrer que $f(x)$ est solution de (H).
3°. Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4°. Déterminer un polynôme qui soit solution particulière de (E_1) et en déduire toutes les solutions de cette équation.
5°. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet un polynôme de degré n comme solution particulière.
6°. En déduire la forme de la solution générale de (E_n).

XI. BE 2001.

On pose $a_n(k) = \dfrac{1}{16^{n+1}(8n+k)}$, $S_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(k)$, $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$,
$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{4-2x^3-x^4-x^5}{16-x^8}dx$

1°. Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{x^k}{16-x^8}$ autour de 0, $k \in \mathbb{N}$
2°. Montrer que $S_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{k-1}}{16-x^8}dx$ pour $k \geq 1$
3°. Exprimer $16J$ en fonction des S_k
4°. Montrer que $I = J$
5°. Calculer I

XII.

1°. Déterminer le développement en série entière autour de 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ et en déduire celui de $\arctan x$
2°. On pose $\phi(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\phi(0) = 1$ sinon.
Déterminer le développement en série entière de $\phi(x)$ autour de 0
Quel est le rayon de convergence de cette série ?
3°. Démontrer l'égalité ci dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}dx$$

4°. En développant en série entière une primitive de $\arctan x$, déterminer la valeur exacte de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

XIII. Rendre la monnaie.

On cherche à déterminer de combien de façon différentes on peut réaliser 100F avec des pièces de 1F, 2F et 5F.
1°. Développer $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ et $\dfrac{1}{1-x^5}$ au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence des séries obtenues.
2°. En déduire que $u(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$ est développable autour de 0 et possède un rayon de convergence ≥ 1. On note $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ son développement.

3°. Montrer, en utilisant la définition du produit de Cauchy, que $a_n = card\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 / a+2b+5c = n\}$
En déduire que la solution cherchée est la nombre a_{100}
4°. On pose $P(x) = (1-x)^3(1+x)$ et $Q(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$. Trouver une relation entre $u(x), P(x)$ et $Q(x)$
5°. En posant $A(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x+1}{5}$ et $B(x) = \dfrac{x^3-x^2-3x+4}{5}$, montrer que $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$
6°. En déduire que $u(x) = \dfrac{A(x)}{Q(x)} + \dfrac{B(x)}{P(x)}$
7°. Développer en série entière $\dfrac{A(x)}{Q(x)}$ puis $\dfrac{B(x)}{P(x)}$ après avoir décomposer cette seconde fraction en éléments simples
8°. Calculer la valeur de a_{100}

Transformées en z

XIV. Calculer les transformées en z.

1°. $u_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$	2°. $u_0 = 1$ et $u_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$	3°. $u_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$	4°. $u_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$
5°. $u_n = \cos n\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$	6°. $u_n = \sin n\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$	7°. $u_n = e^{-an} \cos n\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$	8°. $u_n = e^{-an} \sin n\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$
9°. $u_k = 1$ et $u_n = 0$ si $n \neq k$	10°. $u_n = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$	11°. $u_n = ne^{-an} \ \forall n \in \mathbb{N}$	12°. $u_n = nq^n \ \forall n \in \mathbb{N}$
13°. $u_n = n^2 q^n \ \forall n \in \mathbb{N}$	14°. $u_n = a^n \cos(n\omega) \ \forall n \in \mathbb{N}$	15°. $u_n = a^n \sin(n\omega) \ \forall n \in \mathbb{N}$	16°. $u_n = 2n + 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
17°. $u_1 = u_2 = 1$ et $u_n = 0$	18°. $u_0 = 0$ et $u_n = 1 \ \forall n \geq 1$	19°. $u_n = (n-2)3^{n-2} \ \forall n \geq 2$	20°. $u_n = n + 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

XV. Développement de l'exponentielle.

1°. Développer e^x en série entière.

2°. En déduire la transformée en z des suites $u_n = \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = \dfrac{2^n}{n!}$

3°. Idem avec la suite donnée par $u_{2n} = \dfrac{1}{(2n)!}$ et $u_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 0$.

XVI. Signaux périodiques.

1°. On considère la suite définie par $(u_n)_{n\geq 0} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$. Déterminer sa transformée en z.
2°. Même question avec la suite $(u_n)_{n\geq 0} = (0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, ...)$

3°. Considérons un signal discret périodique de période p noté $(u_n)_{n\geq 0}$ et appelons $(\tilde{u}_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par le motif de base de $(u_n)_{n\geq 0}$, i.e. $\tilde{u}_n = u_n \ \forall 0 \leq n \leq p$ et $\tilde{u}_n = 0$ sinon.
Appelons $F(z)$ la transformée en z de $(u_n)_{n\geq 0}$ et $\tilde{F}(z)$ celle de $(\tilde{u}_n)_{n\geq 0}$. Démontrer que

$$F(z) = \tilde{F}(z) \times \frac{z^p}{z^p - 1}$$

4°. Retrouver les résultats des premières questions à l'aide de cette formule.

XVII. Transformée bilatérale.

On utilise dans cet exercice la forme bilatérale de la transformée en z, pour des signaux $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$: $F(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{u_n}{z^n}$

1°. Déterminer la transformée bilatérale du signal $u_n = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Déterminer sa région de convergence.

2°. Même question pour le signal défini par $u_n = 1$ si $n < 0$ et $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ si $n \geq 0$. Région de convergence ?

XVIII. Calculer les originaux :

1°. $\dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$	2°. $\dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$	3°. $\dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$	4°. $\dfrac{z}{z^2 - 1}$	5°. $\dfrac{3z^2}{z^2 - z - 2}$
6°. $\dfrac{z}{(z-1)^2}$	7°. $\dfrac{z+3}{z-2}$	8°. $\dfrac{z-1}{z+3}$	9°. $\dfrac{z}{(z-a)^2}$	10°. $\dfrac{z}{z^2+1}$
11°. $\dfrac{z}{z^2+4}$	12°. $\dfrac{z}{z^3+1}$	13°. $\dfrac{z^2 - 3}{z^2 - 3z + 2}$	14°. $\dfrac{1}{z(z^2+1)}$	15°. $e^{1/z}$
16°. $\dfrac{1}{1 - z^4}$				

XIX. Equations aux différences finies.

Déterminer la ou les suites satisfaisant à :

1°. $\begin{cases} u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = n \\ u_0 = 2, u_1 = 0 \end{cases}$ 2°. $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 2n \\ u_0 = 1 \end{cases}$ 3°. $\begin{cases} u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = \delta(n) \\ u_0 = 1, u_1 = 3 \end{cases}$

4°. $\begin{cases} u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = n \\ u_0 = 0, u_1 = 0 \end{cases}$ 5°. $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 0 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ 6°. $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 2n + 1 \\ u_0 = \alpha \end{cases}$

Filtrage numérique.

XX. Exemple de filtre simple.

On considère une chaine de traitement numérique définie de la façon suivante :
Si l'entrée correspond à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et la sortie à $(v_n)_{n\geq 0}$, alors $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1°. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du système et calculer sa réponse impulsionnelle.
2°. Même question si l'action du filtre est donnée par $v_n = \alpha u_n - \beta v_{n-1}$

XXI. Effets audio et transformées en z

La suite du programme avec Mme PIEL !!