MATHEMATIQUES TD N°3 : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I

1°. $P(x) = x^2 - x + 1$ et $Q(x) = -x^3 + x + 2$.

$(P+Q)(x) = -x^3 + x^2 + 3$
$PQ(x) = -x^5 + x^4 + x^2 - x + 2$
$P \circ Q(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x + 3$

II

1°. $x^5 + 2x^4 - x^2 + 2x - 1$ par $x^3 + 2x - 1$

$\boxed{Q(x) = x^2 + 2x - 2}$ et $\boxed{R(x) = -4x^2 + 8x - 3}$

2°. $x^6 - 1$ par $x - 1$

$\boxed{Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ et $\boxed{R(x) = 0}$

3°. $x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 1$ par $x^3 + 2$

$\boxed{Q(x) = x^3 + 2x - 1}$ et $\boxed{R(x) = x^2 - x + 1}$

4°. $4x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2$ par $4x^3 - 2x^2 + x + 2$

$\boxed{Q(x) = x^2 + 1}$ et $\boxed{R(x) = -x^2 - x - 2}$

5°. $4x^4 - 1$ par $2x^2 + 1$

$\boxed{Q(x) = 2x^2 - 1}$ et $\boxed{R(x) = 0}$

6°. $2x^4 - ix^3 - x^2 + ix + 1$ par $2x^2 + ix - 1$

$\boxed{Q(x) = x^2 - ix - 1/2}$ et $\boxed{R(x) = (1 + ix)/2}$

III

On rappelle que dans cette division $A = BQ + X^{k+1}S$ où k est l'ordre de la division.

1°. $3 + x + x^2$ par $1 + 2x - 5x^3$ à l'ordre 2

$\boxed{Q(x) = 3 - 5x + 11x^2}$ et $\boxed{S(x) = -7 - 25x + 55x^2}$

2°. $1 + x$ par $1 - x$ à l'ordre 3

$\boxed{Q(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3}$ et $\boxed{S(x) = 2}$

3°. $1 - 2x + x^4$ par $-1 + 3x + x^2$ à l'ordre 3

$\boxed{Q(x) = -1 - x - 4x^2 - 13x^3}$ et $\boxed{S(x) = 44 + 13x}$

4°. $2 + x - 4x^3$ par $2 + x$ à l'ordre 5

$\boxed{Q(x) = 1 - 2x^3 + x^4 - x^5/2}$ et $\boxed{S(x) = x/2}$

5°. $3 + 4x + 4x^2 - x^3 - x^4 - x^5 + x^6$ par $1 + x + x^2$ et $k = 9$

$\boxed{Q(x) = 3 + x - 2x^3 + x^4}$ et $\boxed{S(x) = 0}$

IV

1°. Déterminer P de degré 3 tel que $P(1) = -14, P(-1) = 36, P(2) = 0, P(-2) = 28$.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les 4 contraintes donnent :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -14 \\ -a + b - c + d = 36 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 28 \end{cases}$$

dont la solution est $a = 6$, $b = 1$, $c = -31$, $d = 10$ ie $P(x) = 6x^3 + x^2 - 31x + 10$

2°. Déterminer P de degré 2 vérifiant les trois conditions ci dessous : Le reste de la division euclidienne de P par $x + 1$ est 1, par $x - 2$ est 2 et par $x + 2$ est 1.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ le reste de la division par $x + 1$ donne $c + a - b = 1$. Le reste de la division par $x + 2$ donne $c - 2b + 4a = 1$ et le reste de la division par $x - 2$ donne $c + 2b + 4a = 2$. La solution de ce système 3×3 est $a = 1/12$, $b = 1/4$ et $c = 7/6$

3°. Déterminer α et β pour que $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + \alpha x + \beta$ admette 1 et -2 comme racines et factoriser P.

$P(1) = 0 \iff \alpha + \beta = -5$ et
$P(-2) = 0 \iff \beta - 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -3, \beta = -2$

4°. $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$

On a $P(-1) = 0$ et on peut donc factoriser P par $x + 1$. On trouve $P(x) = (3x + 2)(x - 3)(x + 1)$

5°. Déterminer a et b pour que le polynôme $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ ait une racine double.

$P'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$. Les racines de ce polynôme sont 0 et $2a/3$. 0 est une racine double ssi $b = 0$ et $2a/3$ est une racine double si $b + 19a^3/27 = 0$.

6°. Déterminer $P(x)$ de degré 3 tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x - 1) = x^2$.
En déduire une expression plus simple de $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$\Rightarrow P(x - 1) = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$
$P(x) - P(x - 1) = -3ax^2 + 3ax + a - 2bx + b - c$
Cette expression est égale au polynôme x^2 ssi $3a = 1$, $a - b + c = 0$ et $3a - 2b = 0$. En résolvant le système, on obtient $a = 1/3$, $b = 1/2$, $c = -/6$ et d quelconque, cad $P(x) = (2x^3 + 3x^2 + x)/6$

Ainsi, $P(1) - P(0) = 1^2$, $P(2) - P(1) = 2^2$, ..., $P(n) - P(n - 1) = n^2$. En ajoutant ces n équations, il vient $P(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ et donc $S_n = n(n + 1)(2n + 1)/6$

V

1°. $P(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$

$P(-2) = P(1) = 0$ et l'on peut donc factoriser par $(x + 2)(x - 1)$. Il reste alors à résoudre l'équation de degré 2 et l'on trouve
$\mathcal{S} = \{1; -2; -\frac{1}{8}(1 - \sqrt{113}); -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{113})\}$

2°. $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
On trouve cinq racines évidentes ; comme le polynôme est de degré cinq, on a donc tout factorisé.
$\mathcal{S} = \{0; 1; -1; 2; -2\}$

3°. $P(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$
De la même façon, 1 est racine évidente et -1 est racine

double, il reste alors un facteur de degré 1 et l'on a $\mathcal{S} = \{1; 5; -1; -1\}$

4°. $P(X) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
-1 est racine évidente et la factorisation par $X + 1$ fait apparaître une équation bicarrée. On trouve alors deux racines doubles $\pm\sqrt{2}$. $\mathcal{S} = \{-1; \pm\sqrt{2}\}$

VI

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$

1°. $P(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^3} + \frac{8}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 = \frac{1}{x^4}P(x)$

2°. $P(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a^4}P(a) = 0 \iff a$ racine (si $a \neq 0$).
Comme 1 est racine évidente, son inverse est aussi racine donc 1 est racine double et l'on peut factoriser par $(x-1)^2$. Il reste ensuite à résoudre une équation de degré deux. On a $\mathcal{S} = \{-1; -1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\}$

VII

1°. Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$

$P(2) = P'(2) = 0$ et $P(x) = (x-2)^2(x+5)$

2°. $P(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$
$P'(x) = 4x^3 - 21x^2 + -24x + 176$
$P''(x) = 12x^2 - 42x - 24$
$P''(x) = 0 \iff x = -1/2, 4$
On vérifie que 4 est racine de tous ces polynômes et en factorisant $P(x)$ par $(x-4)^3$, on a $\mathcal{S} = \{-5; 4; 4; 4\}$

VIII

$P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1$
$= (x-1)^3(x+1)(x^2+1)$

Il suffit de voir que 1 est racine triple car $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et -1 est racine $P(-1) = 0$.
On a donc $P(x) = (x-1)^3(x+1)Q(x)$ avec Q de degré 2, de terme dominant x^2 et de coefficient constant 1. Il reste juste à déterminer le terme de degré 1 : on trouve $b = 0$.

IX

$P(x) = 4x^6 - 20x^5 + 37x^4 - 40x^3 + 37x^2 - 20x + 4$

1°. $P(i) = 0 \Rightarrow P(-i) = 0$
2°.
$P(2) = P'(2) = 0 \Rightarrow P(x) = 4(x-2)^2(x-1/2)^2(x^2+1)$

X

1°. $\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$
En effectuant une division euclidienne.

2°. $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

$\alpha = \frac{1}{x+2}\rfloor_{x=2}$ et $\beta = \frac{1}{x-2}\rfloor_{x=-2}$

3°. $\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$\alpha = \frac{3x+1}{x+1}\rfloor_{x=1}$ et $\beta = \frac{3x+1}{x-1}\rfloor_{x=-1}$

4°. $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$
de la même façon.

5°. $\frac{3x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$

de la même façon.

6°.
$\frac{x-2}{(2x-3)^2} = \frac{\alpha}{2x-3} + \frac{\beta}{(2x-3)^2} = \frac{1/2}{2x-3} - \frac{1/2}{(2x-3)^2}$
par identification, par exemple (on a un pôle double). La formule du résidu de pôle simple ne marche pas dans ce cas là.

7°. $\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-7}{x-2} + \frac{9}{x-3}$
idem.

8°. $\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)} = \frac{3/8}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{7/8}{x+3}$
idem.

9°. $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}$

$\gamma = \frac{1}{x^2}\rfloor_{x=1}$
mais cette formule n'est pas utilisable avec α et β car ce sont les résidus d'un pôle double. On doit identifier ou bien utiliser des astuces :
- $\times$ l'équation par x^2 et prenons $x = 0$. On a $\beta = -1$
- $\times$ par x et faisons tendre x vers l'∞. On a $\alpha = -1$

On a : $\frac{1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$

10°. $\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2}$

en remarquant simplement que $2x + 1 = 2(x-2) + 5$ et en coupant la fraction en deux. On peut aussi faire le changement de variable $y = x - 2$ et effectuer une division suivant les puissances croissantes dans la fraction obtenue. En posant $y = x - 2$,
$F(x) = G(y) = \frac{2y+5}{y^3} = \frac{5}{y^3} + \frac{2}{y^2}$

11°. $\frac{4}{x^3+4x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+4}$

- $\alpha = \frac{4}{x^2+4}\rfloor_{x=0} = 1$
- en $\times$ par $x^2 + 4$ et en posant $x = 2i$ on a $\beta = -1$ et $\gamma = 0$

d'où $\frac{4}{x^3+4x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$

12°. $\frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{5/7}{x-2} + \frac{-1/7 + 2/7x}{x^2+x+1}$
Le premier pôle est simple, on applique la formule des résidus. Pour le second, on effectue deux astuces : $\times$ par x et faire tendre vers l'infini ou bien poser $x = 0$, etc.

13°. $\frac{1}{x^3(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}$

On a un pôle triple et un élément polaire de seconde espèce. On peut obtenir toutes les constantes en effectuant une unique division suivant les puissances croissantes de 1 par x^3

14°. $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1/4}{x-1}-\dfrac{1/4}{x+1}-\dfrac{1/2}{x^2+1}$

On a deux pôles simples et un élément d'ordre deux. Les résidus des pôles simples s'obtiennent par la méthode du résidu d'un pôle simple. Les deux dernières constantes s'obtiennent en $\times$ par x et en posant $x=i$. On peut effectuer la décomposition dans $\mathbb{C}$; en ce cas, on n'a que des pôles simples et on regroupe ensuite les éléments conjugués pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$.

15°. $\dfrac{x^4+x^3+1}{x^3+1}=x+1+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

$F(x)=x+1+\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}$
$\alpha=1/3x^2\rfloor_{-1}=1/3$, puis en $\times$ par x et en faisant tendre x vers ∞, on a $\alpha+\beta=0$. En prenant ensuite $x=0$ dans les deux membres, $\alpha+\gamma=0$ d'où $\alpha=1/3$, $\beta=\gamma=-1/3$

16°. $\dfrac{x^3-4x+1}{(x-1)^4(x^2+1)}$
$=-\dfrac{1}{(x-1)^4}+\dfrac{1/2}{(x-1)^3}+\dfrac{3/2}{(x-1)^2}-\dfrac{5/4}{x-1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{-1+5x}{x^2+1}$
Un moyen rapide de trouver ce résultat est de poser $y=x-1$ et d'effectuer une division suivant les puissances croissantes. On trouve $F(x)=G(y)=\dfrac{y^3+3y^2-y-2}{y^4(y^2+2y+2)}$ et la division de $-2-y+3y^2+y^3$ par $2+2y+y^2$ donne comme quotient $-1+y/2+3/2y^2-5/4y^3$ et comme reste $-5/2y^3-3/2y^4$

17°. $\dfrac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}+\dfrac{1+x}{x^2+2}$

On a à faire à un élément polaire de seconde espèce, élevé au carré. Il faut donc trouver 4 astuces pour déterminer les constantes. On peut calculer les membres en $x=0$, en $x=1$, $\times$ par x et faire tendre tendre vers l'∞, etc...

18°. $\dfrac{x^4}{x^4-16}=1+\dfrac{1/2}{x-2}-\dfrac{1/2}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+4}$

Deux pôles simples et élément de seconde espèce.

19°. $\dfrac{1}{x^2+1}$

Est déjà décomposé. C'est une bonne nouvelle : il n'y a rien à faire.

20°. $\dfrac{2(a^2+b^2)x^2}{x^4+(a^2-b^2)x^2-a^2b^2}$
$=\dfrac{-b}{b-x}+\dfrac{-b}{b+x}+\dfrac{2a^2}{x^2+a^2}$
Posons
$D(x)=x^4+(a^2-b^2)x^2-a^2b^2=(x^2-b^2)(x^2+a^2)$
$=(x-b)(x+b)(x^2+a^2)$
$F(x)=\dfrac{\alpha}{x-b}+\dfrac{\beta}{x+b}+\dfrac{\gamma x+\delta}{x^2+a^2}$
$\alpha=\frac{N(b)}{D'(b)}=\frac{(a^2+b^2)b^2}{2b(a^2+b^2)}=b/2$
$\beta=\frac{N(-b)}{D'(-b)}=\frac{(a^2+b^2)b^2}{-2b(a^2+b^2)}=-b/2$
$(x^2+a^2)F(x)=(a^2+b^2)\frac{x^2}{x^2-b^2}$ en $x=ai$
$(x^2+a^2)F(x)=a^2$
Par ailleurs $(x^2+a^2)\left(\dfrac{\alpha}{x-b}+\dfrac{\beta}{x+b}\right)+\gamma x+\delta$
en $x=ai$, $\gamma ai+\delta=a^2\Rightarrow\gamma=0$ et $\delta=a^2$

21°. $\dfrac{x+2}{x(x-1)^2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

22°. $\dfrac{x^4}{x^3-3x+2}=x+\dfrac{11}{9(x-1)}+\dfrac{1}{3(x-1)^2}+\dfrac{16}{9(x+2)}$

23°. $\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}=1-\dfrac{4}{5(x+2)}+\dfrac{4x-6}{5(x^2-2x+2)}$

24°. $\dfrac{2x^4+x^3+3x^2+3x+2}{x^2(x+1)}=2x-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x^2}$

25°. $\dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x-k)}$

Le dénominateur possède n racines simples qui sont les entiers entre 0 et n. On peut appliquer le théorème de décomposition qui donne :
$F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{x-k}$ avec $\alpha_i=\dfrac{n!}{\prod_{k\neq i}(i-k)}=(-1)^{n-i}C_n^i$

26°. $\dfrac{1}{(x-1)(x^n-1)}$ je passe

27°.
$\dfrac{x+2}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=\dfrac{1/3}{x-1}-\dfrac{2/3}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{x}{3(x^2+x-1)}$

28°. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+3)(x^2+1)}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{3/5}{3+x}+\dfrac{4+2x}{5(x^2+1)}$

XI

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $A(x)=x+1$ par $B(x)=x^2+1$ à l'ordre $k=2$.

On trouve $Q(x)=1+x-x^2$ et $R(x)=-x^3+x^4$. Ainsi, $\dfrac{A(x)}{B(x)}=(1+x-x^2)+\dfrac{-x^3+x^4}{x^2+1}$

2°. Décomposer en éléments simples la fraction $F(x)=\dfrac{x+1}{x^3(x^2+1)}$

$F(x)=\dfrac{A(x)}{x^3B(x)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x-1}{x^2+1}$. On obtient ainsi toute la décomposition à partir du résultat de la question 1°.

3°. Soit $G(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)^3(x^2-4x+5)}$

Démontrer que $G(x)=F(x-2)$ et en déduire la décomposition en éléments simples de $G(x)$

La vérification est évidente : en remplaçant x par $x-2$ dans $F(x)$ on obtient l'expression de $G(x)$. On en déduit alors la décomposition à partir de celle de $F(x)$:
$G(x)=\dfrac{-1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{x-3}{x^2-4x+5}$

XII

1°.

$$\begin{array}{l|l}
8+8x+4x^2 & 2+x \\ \cline{2-2}
8+4x & 4+2x+x^2 \\ \cline{1-1}
4x+4x^2 & \\
4x+2x^2 & \\ \cline{1-1}
2x^2 & \\
2x^2+x^3 & \\ \cline{1-1}
-x^3 &
\end{array}$$

2°. $F(x) = \dfrac{\alpha_1}{x} + \dfrac{\alpha_2}{x^2} + \dfrac{\alpha_3}{x^3} + \dfrac{\beta}{x+2}$
$= \dfrac{A(x)}{x^3 B(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x+2}$
en utilisant le résultat de la division précédente.

3°. On constate facilement que
$G(x) = F(x-1) = \dfrac{4x^2+4}{(x-1)^3(x+1)}$
$= \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{4}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{x+1}$

XIII

Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°. Montrer que $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$ $\forall n \geq 1$.

$P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$
$P'_n(x) = 1 + x + ... + n\dfrac{x^{n-1}}{n!} = P_{n-1}(x)$

2°. Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle.

Si P est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et si $P(a) = P(b) = 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $P'(c) = 0$
Autrement dit, les zéros de $P_{n-1} = P'_n$ séparent les zéros de P_n.

3°. En déduire les zéros réels de $P_n(x)$.

A vous de trouver....

XIV

1°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $x^n + \dfrac{1}{x^n} = P_n(x + \dfrac{1}{x})$

Si $n = 0$ ou $n = 1$, c'est évident en choisissant $P_0(x) = 2$ et $P_1(x) = x$. Si $n \geq 2$, alors
$(x + \dfrac{1}{x})(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}) = x^n + \dfrac{1}{x^n} + x^{n-2} + \dfrac{1}{x^{n-2}}$
Ainsi, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Un tel polynôme est unique ; en effet, si l'on suppose l'existence de deux polynômes possédant la propriété ci-dessus, alors $P_n(x+1/x) = Q_n(x+1/x)$ et comme $x + 1/x$ prend une infinité de valeurs, ces deux polynômes ont une infinité de valeurs communes : ils sont égaux.

2°. Montrer que P_n est à racines simples et décomposer en éléments simples la fraction $R_n(x) = \dfrac{1}{P_n(x)}$

Posons :

$$z_k = \exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad k = 0, ..., n-1$$

Alors $z_k^{2n} = -1$, ie $z_k^n + \dfrac{1}{z_k^n} = 0$
$\Rightarrow P_n(2\cos(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n})) = 0$. Ainsi, les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, ..., n-1$ sont les n racines distinctes de P_n.

$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha_k}{x - x_k}$ et l'on détermine les α_k à l'aide du théorème des résidus : $\alpha_k = 1/P'_n(x_k)$
En dérivant la relation de récurrence, on obtient
$\alpha_k = n\dfrac{(-1)^k}{\sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$ et l'on a donc

$$R_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{x - 2\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$$

3°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $Q_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos nx = Q_n(\cos x)$.

Posons $z = e^{ix}$ dans la relation de récurrence. On obtient $P_n(2\cos x) = 2\cos(nx)$ en appliquant les formules de Moivre. Il suffit donc de poser $Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(2x)$

4°. En déduire, pour $x \neq \dfrac{2k+1}{2n}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que :

$$\frac{1}{\cos nx} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{\cos x - \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$$

Finalement, substituons x à $\cos x$ dans la relation : nous obtenons l'égalité demandée.

XV

Soit $Q_n(x) = (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$.

1°. Préciser le degré de Q_n et le coefficient du terme de plus haut degré.

$(1+x)^{2n} = x^{2n} + 2nx^{2n-1} + ...$ et
$(1-x)^{2n} = x^{2n} - 2nx^{2n-1} + ...$
Ainsi, $P_n(x) = 4nx^{2n-1} + ...$ et le degré est donc $2n-1$

2°. Chercher les racines de Q_n dans $\mathbb{C}$ (on pourra poser $u = \dfrac{1+x}{1-x}$).

$P_n(x) = (1-x)^{2n}(u^{2n} - 1)$
$P_n(x) = 0 \iff u^{2n} = 1$ (1 n'est pas racine). Les racines de $u^{2n} = 1$ sont les complexes $e^{ik\pi/n}$, $k = 0, ..., 2n-1$ et $u = \dfrac{1+x}{1-x} \iff x = \dfrac{u-1}{u+1}$ On a alors

$$x = \frac{e^{ik\pi/n} - 1}{e^{ik\pi/n} + 1} = i\tan(\frac{k\pi}{2n})$$

3°. Montrer que $Q_n(x) = 4nx\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 + \tan^2\dfrac{k\pi}{2n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Q_n est à coefs réels et à racines complexes $\Rightarrow$ les racines sont 2 à 2 conjuguées.

$Q_n(x) = \lambda \prod_{k=0}^{2n-1}(x - x_k)$ λ étant le coef du terme de plus haut degré donc $\lambda = 4n$

4°. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$, $n \geq 2$.

En regroupant les racines et leurs conjuguées, on trouve l'équation demandée.

XVI

Un registre à décalage à rétroaction linéaire (LFSR pour Linear Feedback Shift Register) est composé d'un tableau de L bits $(s_i, s_{i+1}, ..., s_{i+L-1})$ et d'une fonction de rétroaction linéaire. A chaque cycle d'horloge, le bit le plus à droite sort du tableau, les autres bits sont décalés d'une case vers la droite et le bit s_{i+L} entrant dans le tableau par la gauche est calculé par l'équation de récurrence linéaire :

$$s_{i+L} = \sum_{k=1}^{L} c_k s_{i+L-k} = c_1 s_{i+L-1} + c_2 s_{i+L-2} + ... + c_L s_i$$

Les coefficients $c_1, ..., c_L$ caractérisent la fonction de rétroaction et s'appellent coefficients de rétroaction. Ils sont à valeurs binaires. Le polynôme de rétroaction du registre est $P(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_L x^L$

Les bits $(s_0, s_1, ..., s_{L-1})$ constituent l'état initial du registre. Enfin, le registre produit en sortie une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les L premiers éléments sont $(s_0, s_1, ..., s_{L-1})$ et les suivants sont calculés à partir de la relation de récurrence. Les bits initiaux et la fonction de rétroaction déterminent entièrement la suite en sortie. Tous les calculs s'effectuent modulo 2 (la somme est alors équivalente à un xor).

On peut utiliser un LFSR comme générateur pseudo aléatoire ou en cryptographie.

1°. Construire le registre à décalage caractérisé par le polynôme de rétroaction $P(x) = 1 + x^2 + x^3$

Le registre contient 3 cases la somme des deux dernières étant réinjectées à gauche du registre.

2°. Déterminer les 10 premiers termes de la suite produite à partir de l'état initial $(1, 1, 0)$.

On obtient $s = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, ...)$

3°. Construire le registre caractérisé par $P(x) = 1 + x + x^4$

Le registre contient quatre cases la somme de la première et de la dernière étant injectée en entrée.

4°. Déterminer les 10 premiers termes de la suite produite par l'état initial $(1, 0, 0, 1)$.

On obtient : $s = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, ...)$

XVII

Tout canal de communication est susceptible de provoquer des erreurs de transmission (atténuation, perturbations, brouillage, ...) ; l'utilisation des codes correcteurs permet la détection et éventuellement la correction de tout ou partie de ces erreurs. Ils sont donc systématiquement utilisés dans tout type de transmission : liaisons satellitaires, téléphoniques, GSM, UMTS, Wifi, TNT, norme MPEG, etc. On les trouve également dans tous les supports de transmissions : disques durs ; mémoires vives, lecteurs MP3, disques compacts ou DVD. Les codes correcteurs BCH ont été inventés dans les années 1960 par Alain Hocquenghem en France puis indépendamment par R.C.Bose et K.R.Chaudhuri au MIT. Ces codes se représentent facilement à l'aide de polynômes à coefficients binaires.

Pour construire un code BCH, nous avons besoin d'un polynôme irréductible $P(x) \in \mathbb{F}_2[x]$. Choisissons

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

1°. Démontrer que ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{F}_2$

$P(x)$ est de degré 3 et $P(0) = P(1) \neq 0$. Il ne possède pas de racines et est de degré 3, c'est donc un polynôme irréductible.

2°. Calculer le reste de la division euclidienne de x^3 par $P(x)$. Faire de même avec $1, x, x^2, x^4, x^5, x^6, x^7$.

Le reste de la division de 1 par $P(x)$ est 1
Le reste de la division de x par $P(x)$ est x
Le reste de la division de x^2 par $P(x)$ est x^2
Le reste de la division de x^3 par $P(x)$ est $x + 1$
Le reste de la division de x^4 par $P(x)$ est $x^2 + x$
Le reste de la division de x^5 par $P(x)$ est $x^2 + x + 1$
Le reste de la division de x^6 par $P(x)$ est $x^2 + 1$
Le reste de la division de x^7 par $P(x)$ est ... 1 car $x^7 = 1$

3°. Bernard reçoit les trois messages suivants : (1000110), (1010110) et (0001111). Dans chacun des cas, indiquer quel était le message initial.

Sous forme de polynôme, le message devient $u(x) = x^6 + x^2 + x$. La division par $P(x) = x^3 + x + 1$ donne comme reste $x + 1 \equiv x^3 \mod P(x)$, ce qui prouve la présence d'une erreur au bit numéro 3 (cad correspondant à la position x^3). Le bon message était donc (1001110).

Pour le second message, $u(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x$. Le reste obtenu est $x^2 + 1 \equiv x^6 \mod P(x)$ et le bon message est donc (0010110).

Pour le troisième message, $u(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ dont le reste vaut $x^2 \equiv x^2 \mod P(x)$. Le bon message était donc (0001011).