MATHEMATIQUES TD N°3 : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I Arithmétique des polynômes.

1°. Soient $P(X) = X^2 - X + 1$ et $Q(X) = -X^3 + X + 2$. Calculer $P + Q$, PQ et $P \circ Q$

II Division euclidienne.

1°. $X^5 + 2X^4 - X^2 + 2X - 1$ par $X^3 + 2X - 1$
2°. $X^6 - 1$ par $X - 1$
3°. $X^6 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 3X - 1$ par $X^3 + 2$
4°. $4X^5 - 2X^4 + 5X^3 - X^2$ par $4X^3 - 2X^2 + X + 2$
5°. $4X^4 - 1$ par $2X^2 + 1$
6°. $2X^4 - iX^3 - X^2 + iX + 1$ par $2X^2 + iX - 1$

III Division suivant les puissances croissantes.

1°. $3 + X + X^2$ par $1 + 2X - 5X^3$ à l'ordre 2
2°. $1 + X$ par $1 - X$ à l'ordre 3
3°. $1 - 2X + X^4$ par $-1 + 3X + X^2$ à l'ordre 3
4°. $2 + X - 4X^3$ par $2 + X$ à l'ordre 5
5°. $3 + 4X + 4X^2 - X^3 - X^4 - X^5 + X^6$ pat $1 + X + X^2$ à l'ordre 9

IV Identification d'un polynôme.

1°. Déterminer P de degré 3 tel que $P(1) = -14, P(-1) = 36, P(2) = 0, P(-2) = 28$.
2°. Déterminer P de degré 2 vérifiant les trois conditions ci dessous:
Le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est 1, par $X - 2$ est 2 et par $X + 2$ est 1.
3°. Déterminer α et β pour que $P(X) = 2X^3 + 3X^2 + \alpha X + \beta$ admette 1 et -2 comme racines et factoriser P.
4°. Soit $P(X) = 3X^3 - 4X^2 - 13X - 6$. Montrer que -1 est racine de P et factoriser ce polynôme.
5°. Déterminer a et b pour que le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + b$ ait une racine double.
6°. Déterminer $P(X)$ de degré 3 tel que $\forall X \in \mathbb{R}$, $P(X) - P(X - 1) = X^2$.
En déduire une expression plus simple de $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

V Résolution d'équations.

1°. Soit $P(X) = 4X^4 + 5X^3 - 14X^2 - 9X + 14$. Calculer $P(1), P(-2)$ puis résoudre $P(X) = 0$.
2°. Factoriser $P(X) = X^5 - 5X^3 + 4X$ puis résoudre $P(X) = 0$.
3°. Idem avec $P(X) = X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 4X + 5$.
4°. Idem avec $P(X) = X^5 + X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 4X + 4$

VI Polynôme réciproque.

Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 5X + 1$
1°. Montrer que si $X \neq 0$, $P(\frac{1}{X}) = \frac{1}{X^4}P(X)$
2°. Montrer que si a est racine, alors $\frac{1}{a}$ l'est aussi et résoudre $P(X) = 0$

VII Racines multiples.

1°. Soit $P(X) = X^3 + X^2 - 16X + 20$.Montrer que 2 est racine double et factoriser P
2°. Déterminer les racines de $P(X) = X^4 - 7X^3 - 12X^2 + 176X - 320$ sachant qu'il admet une racine triple.

VIII

Soit $P(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^2 + 2X - 1$.

1°. Montrer que 1 est racine de P. Quelle est sa multiplicité ?
2°. Déterminer une autre racine simple et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$

IX

Soit $P(X) = 4X^6 - 20X^5 + 37X^4 - 40X^3 + 37X^2 - 20X + 4$

1°. Montrer que i est racine de P. En déduire une autre racine.
2°. Montrer que 2 est racine. En déduire la factorisation de P.

X Décomposition en éléments simples.

1°. $\dfrac{X^2+1}{X-1}$ 2°. $\dfrac{2X}{X^2-4}$ 3°. $\dfrac{3X+1}{X^2-1}$ 4°. $\dfrac{1}{(X-1)(X+2)}$

5°. $\dfrac{3X-1}{(X-3)(X+1)}$ 6°. $\dfrac{X-2}{(2X-3)^2}$ 7°. $\dfrac{2X+3}{X^2-5X+6}$ 8°. $\dfrac{X^2+X+1}{(X^2-1)(X+3)}$

9°. $\dfrac{1}{X^2(X-1)}$ 10°. $\dfrac{2X+1}{(X-2)^3}$ 11°. $\dfrac{4}{X^3+4X}$ 12°. $\dfrac{X^2+1}{(X-2)(X^2+X+1)}$

13°. $\dfrac{1}{X^3(X^2+1)}$ 14°. $\dfrac{1}{X^4-1}$ 15°. $\dfrac{X^4+X^3+1}{X^3+1}$ 16°. $\dfrac{X^3-4X+1}{(X-1)^4(X^2+1)}$

17°. $\dfrac{X^3+X^2+2}{(X^2+2)^2}$ 18°. $\dfrac{X^4}{X^4-16}$ 19°. $\dfrac{1}{X^2+1}$ 20°. $\dfrac{2(a^2+b^2)X^2}{X^4+(a^2-b^2)X^2-a^2b^2}$, $a > b > 0$

21°. $\dfrac{X+2}{X(X-1)^2}$ 22°. $\dfrac{X^4}{X^3-3X+2}$ 23°. $\dfrac{X^3}{X^2-2X+4}$ 24°. $\dfrac{2X^4+X^3+3X^2+3X+2}{X^2(X+1)}$

25°. $\dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(X-k)}$ 26°. $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ 27°. $\dfrac{X+2}{(X-1)^3(X^2+X+1)}$ 28°. $\dfrac{4X}{(X+1)(X+3)(X^2+1)}$

XI

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $A(x) = x + 1$ par $B(x) = x^2 + 1$ à l'ordre $k = 2$.

2°. Décomposer en éléments simples la fraction $F(x) = \dfrac{x+1}{x^3(x^2+1)}$

3°. Soit $G(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^3(x^2-4x+5)}$

Démontrer que $G(x) = F(x-2)$ et en déduire la décomposition en éléments simples de $G(x)$

XII

Soit $A(x) = 4x^2 + 8x + 8$ et $B(x) = x + 2$

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $A(x)$ par $B(x)$

2°. Décomposer en éléments simples la fraction $F(x) = \dfrac{4x^2+8x+8}{x^3(x+2)}$

3°. En déduire la décomposition en éléments simples de $G(x) = \dfrac{4x^2+4}{x^4-2x^3+2x-1}$

XIII Application du théorème de Rolle.

Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
1°. Montrer que $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ $\forall n \geq 1$.
2°. Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle.
3°. En déduire les zéros réels de $P_n(x)$.

XIV Développement eulérien.

1°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^n + \dfrac{1}{X^n} = P_n(X + \dfrac{1}{X})$

2°. Montrer que P_n est à racines simples et décomposer en éléments simples la fraction $R_n(X) = \dfrac{1}{P_n(X)}$

3°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $Q_n(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos nx = Q_n(\cos x)$.

4°. En déduire, pour $x \neq \dfrac{2k+1}{2n}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que:

$$\frac{1}{\cos nx} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\frac{2k+1}{2n}\pi)}{\cos x - \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)}$$

XV Limite d'un produit.

Soit $Q_n(X) = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$.

1°. Préciser le degré de Q_n et le coefficient du terme de plus haut degré.
2°. Chercher les racines de Q_n dans $\mathbb{C}$ (on pourra poser $u = \dfrac{1+x}{1-x}$).
3°. Montrer que $Q_n(X) = 4nx \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 + \tan^2 \dfrac{k\pi}{2n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4°. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \dfrac{k\pi}{2n}$, $n \geq 2$.

Applications.

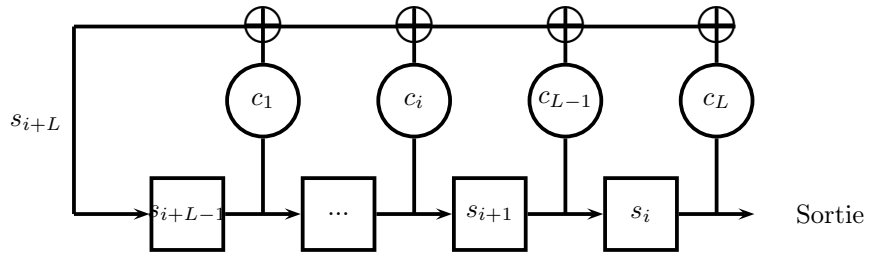
XVI Registres à décalage à rétroaction linéaire.

Un registre à décalage à rétroaction linéaire (LFSR pour Linear Feedback Shift Register) est composé d'un tableau de L bits $(s_i, s_{i+1}, ..., s_{i+L-1})$ et d'une fonction de rétroaction linéaire. A chaque cycle d'horloge, le bit le plus à droite sort du tableau, les autres bits sont décalés d'une case vers la droite et le bit s_{i+L} entrant dans le tableau par la gauche est calculé par l'équation de récurrence linéaire:

$$s_{i+L} = \sum_{k=1}^{L} c_k s_{i+L-k} = c_1 s_{i+L-1} + c_2 s_{i+L-2} + ... + c_L s_i$$

Les coefficients $c_1, ..., c_L$ caractérisent la fonction de rétroaction et s'appellent coefficients de rétroaction. Ils sont à valeurs binaires. Le polynôme de rétroaction du registre est $P(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_L x^L$

Les bits $(s_0, s_1, ..., s_{L-1})$ constituent l'état initial du registre. Enfin, le registre produit en sortie une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les L premiers éléments sont $(s_0, s_1, ..., s_{L-1})$ et les suivants sont calculés à partir de la relation de récurrence. Les bits initiaux et la fonction de rétroaction déterminent entièrement la suite en sortie. Tous les calculs s'effectuent modulo 2 (la somme est alors équivalente à un xor).



On peut utiliser un LFSR comme générateur pseudo aléatoire ou en cryptographie.

1°. Construire le registre à décalage caractérisé par le polynôme de rétroaction $P(x) = 1 + x^2 + x^3$
2°. Déterminer les 10 premiers termes de la suite produite à partir de l'état initial $(1, 1, 0)$.
3°. Construire le registre caractérisé par $P(x) = 1 + x + x^4$
4°. Déterminer les 10 premiers termes de la suite produite par l'état initial $(1, 0, 0, 1)$.

XVII Codes correcteurs BCH

Tout canal de communication est susceptible de provoquer des erreurs de transmission (atténuation, perturbations, brouillage, ...); l'utilisation des codes correcteurs permet la détection et éventuellement la correction de tout ou partie de ces erreurs. Ils sont donc systématiquement utilisés dans tout type de transmission: liaisons satellitaires, téléphoniques, GSM, UMTS, Wifi, TNT, norme MPEG, etc. On les trouve également dans tous les supports de transmissions: disques durs; mémoires vives, lecteurs MP3, disques compacts ou DVD. Les codes correcteurs BCH ont été inventés dans les années 1960 par Alain Hocquenghem en France puis indépendamment par R.C.Bose et K.R.Chaudhuri au MIT. Ces codes se représentent facilement à l'aide de polynômes à coefficients binaires.

Pour construire un code BCH, nous avons besoin d'un polynôme irréductible $P(x) \in \mathbb{F}_2[x]$. Choisissons

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

1°. Démontrer que ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{F}_2$
2°. Calculer le reste de la division euclidienne de x^3 par $P(x)$. Faire de même avec $1, x, x^2, x^4, x^5, x^6, x^7$.

Voici maintenant le principe du codage: Alice veut envoyer à Bernard 4 bits d'information notés $a_6a_5a_4a_3$ chaque bit pouvant prendre comme valeur 0 ou 1. Alice forme alors le polynôme

$$A(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 \in \mathbb{F}_2[x]$$

Soit $R(x)$ le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $P(x) = x^3 + x + 1$. Alors $R(x)$ est de la forme

$$R(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{F}_2[x]$$

Alice envoie alors à Bernard le message $(a_6a_5...a_0)$ représenté par le polynôme $M(x) = A(x) + R(x)$

Bernard reçoit un message (ce peut être le message précédent ou un message dans lequel s'est glissé une erreur, et l'on supposera ici qu'il ne peut y avoir plus d'une erreur dans le message). Notons ce message $(b_6b_5...b_0)$.

Bernard forme alors le polynôme $B(x) = b_6x^6 + b_5x^5 + ... + b_0$ et calcule le reste de la division de $B(x)$ par le polynôme $P(x) = x^3 + x + 1$ en utilisant les règles de calcul dans $\mathbb{F}_2[x]$.

Si ce reste est nul, alors il n'y a pas d'erreur de transmission. Sinon, le reste est l'un des 8 restes possibles déterminés ci-dessus. En ce cas, il correspond à un polynôme de la forme x^k. L'erreur se trouve au bit n° k; pour la corriger, il suffit de permuter $0 \leftrightarrow 1$. Exemple:

Alice veut transmettre (1101). Elle forme $A(x) = x^6 + x^5 + x^3$ et calcule le reste de ce polynôme après division par $x^3 + x + 1$. Le reste vaut $R(x) = 1$ $\Rightarrow$ Alice envoie finalement le message (1101001) sous la forme du polynôme $M(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$

Bernard reçoit (1101101). Il forme le polynôme $B(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ et calcule le reste; celui-ci correspond à x^2. Il y a donc eu une erreur de transmission dans le bit d'exposant 2 et le bon message était (1101001)

3°. Bernard reçoit les trois messages suivants: (1000110), (1010110) et (0001111). Dans chacun des cas, indiquer quel était le message initial.