MATHEMATIQUES TD N°2 : LIMITES - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I

1°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2-2x+1=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2=+\infty$

2°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -4x^3+9x+2=\lim\limits_{x\to\pm\infty} -4x^3=\mp\infty$

3°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^3+4x^2-x+1=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^3=\pm\infty$

4°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+9x-1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2}{x^2}=3$

5°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{7x+3}{4x^2-3x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{7x}{4x^2}=0$

6°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2+3x+2}{x-1}=\pm\infty$

7°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^5+3x^2+1}{x^4+2x}=\pm\infty$

8°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{8x^3+2x^2-x+1}{4x^3-1}=2$

II

1°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-5}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3}{(x-2)^2}=-\infty$

En effet, $(x-2)^2$ est toujours positif et la fraction est donc toujours <0.

2°. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x^2-x+1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{(x-1)^3}=+\infty$

En effet, $x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow (x-1)^3>0$. La fraction est donc positive à gauche de 1 et tend vers l'infini. De la même façon, la fraction est négative à droite de 1 :

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x^2-x+1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{(x-1)^3}=-\infty$

3°. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}=-\infty$

En effet, le numérateur étant non nul en 2, on peut remplacer son expression par sa valeur en 2 dans le calcul de la limite. Par ailleurs le dénominateur s'écrit $(x-1)(x-2)$ qui est équivalent à $x-2$ au voisinage de 2. Comme $x-2<0$ si $x<2$, on en déduit que l'expression est négative à gauche de 2 et tend donc vers $-\infty$. De la même façon, elle tend vers $+\infty$ à droite de 2.

4°. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{2x}=+\infty$

5°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+4}{x-3}=-1$ car ce n'est pas un pôle !

6°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x-2)(x+3/2)}{(x-2)(x-1)}=7$

On peut également utiliser la règle de l'Hôpital

7°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{2x^3-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(2x+1)}=4/3$

On peut aussi utiliser deux fois la règle de l'Hôpital.

8°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^n}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1} 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=n$

Ou bien encore l'Hôpital.

9°. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x-1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-4}{(x-3)^2}=-\infty$

10°. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{(x-2)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2}{(x-2)}=-\infty$

11°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)}=+\infty$

12°. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^5-a^5}{x^2-a^2}=\frac{5}{2}a^3$ par l'Hospital.

III

Dans la plupart des cas, l'application de la règle de l'Hôpital reste la méthode la plus rapide.

1°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=1/2$

2°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)=16$

3°.
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x}+1)}=1/3$

4°. $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x+\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$

5°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x+3}+2)=8$

6°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x}=0$

7°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\sqrt{2}/4$

8°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{.}+\sqrt{..}}=0$

9°. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\epsilon(x)}{\sqrt{x+1}+1}=-1/2$

$\epsilon(x)$ est la fonction signe de x ie. égale à ± 1 selon le signe de x.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\epsilon(x)}{\sqrt{x+1}+1}=1/2$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}+1}=1/2$

11°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x-2}-2}=8/9$

12°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$

IV

1°. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-a^4}{x-a}=\lim\limits_{x\to a} 4x^3=4a^3$

2°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1}=1$

3°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = 1/6$

4°. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln \sin \frac{x}{2}}{(x-\pi)^2} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{-1}{2\sin^2(x/2)} = -1/8$

5°. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \lim\limits_{x\to 64} \dfrac{(1/3)x^{-2/3}}{(1/2)x^{-1/2}} = 1/3$

6°. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{\sin x - \sin a} = \dfrac{1}{\cos^3 a}$ si $a \neq \pi/2 + 2k\pi$

7°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-1/2)x^{-1/2}}{(-1/3)x^{-2/3}} = 3/2$

8°. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^r - a^r}{x^s - a^s} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{rx^{r-1}}{sx^{s-1}} = \frac{r}{s}a^{r-s}$

9°. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{-1}{\cos^2 x} = -2$

10°.
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt{x+2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{3}(6+x)^{-2/3} - \dfrac{1}{2}(x+2)^{-1/2}\right)$
$= -1/6$

V

Le principe est souvent le même ; en partant de l'encadrement de $\sin x$ et $\cos x$ par -1 et 1, on encadre les fonctions par des expressions qui ont la même limite et l'on applique le théorème des gendarmes. On peut aussi utiliser un encadrement en valeur absolue.

1°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}} = 0$ car $|\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}} \to 0$

2°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ car $|\dfrac{x\sin x}{x^2+1}| \leq \dfrac{|x|}{x^2+1} \to 0$

3°. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ car $|x\sin\dfrac{1}{x}| \leq |x| \to 0$

4°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0$ car $|\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}| \leq \dfrac{|x^2|}{|\sin x|} \sim |x| \to 0$

5°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x + 3}{2x} = 0$ car $|..| \leq \dfrac{2}{|x|} \to 0$

6°. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x)\sin\dfrac{1}{x^2} = 0$ car $|..| \leq \ln(1-x) \to 0$

7°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\cos x = 0$ pour les mêmes raisons.

8°. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}) = +\infty$ car $|..| \geq \dfrac{1}{x^2} - 1 \to +\infty$

9°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$ car $x-1 \leq E(x) \leq x$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \times E(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} E(1/x)/(1/x) = 1$

VI

On a régulièrement des formes indéterminées du type 1^∞. Il faut déjà se rendre compte qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On utilise ensuite la formule suivante pour transformer les expressions :

$$a^x = e^{x\ln a}$$

quand $a > 0$
Puis il faut utiliser des équivalents ou bien la règle de l'Hospital pour lever l'indétermination.

1°. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x/x} = 0$

En effet $\ln x$ tend vers $-\infty$ en 0^+, $1/x$ tend vers $+\infty$ et le produit des deux tend donc vers $-\infty$. Par composition, la limite est nulle.

2°. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Même technique pour cette question. $\ln x/x$ tend vers 0 en l'infini (théorème des croissances comparées).

3°. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

On utilise la formule proposée en début d'exercice et le fait que $x\ln x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (croissances comparées des puissances et des logarithmes).

4°. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln(1+1/x)} = e$

Il s'agit d'une des limites les plus importantes de cette leçon. On constate que l'expression initiale est de la forme 1^∞. On utilise la formule pour mettre cette expression sous forme exponentielle et l'on se retrouve donc à devoir calculer la limite de $x\ln(1+1/x)$ lorsque x tend vers l'infini. Il s'agit encore d'une forme indéterminée du type $0\times\infty$. L'idée est de la mettre sous la forme d'une fraction pour pouvoir appliquer la règle de l'Hospital :

$x\ln(1+1/x) = \ln(1+1/x)/(1/x)$. On a alors :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(-1/x^2)}{(-1/x^2)(1+1/x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1+1/x} = 1$
Ainsi, la limite de l'expression initiale vaut $e^1 = e$

De la même façon, on aurait pu chercher $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
La limite est la même en substituant x à $1/x$ dans l'expression. Ou bien on peut également reprendre la démo précédente :

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(1+x)/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{1/(1+x)} = e$

5°. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{x^2}{x-1})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(x-1)} = e^0 = 1$

6°. $\lim\limits_{x\to 0} x^{(x^x)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln x \times e^{x\ln x}} = 0$

7°. $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$

8°. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sqrt{x}\ln x} = 1$

9°. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\ln x/x} = 1$

10°. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{1+2\ln x}} = \sqrt{e}$

VII

1°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = 0$

2°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-6x+8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-4} = -1/2$

3°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)(x-5)} = -5/6$

4°. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20} = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{4}{x-5} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20} = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{4}{x-5} = -\infty$

5°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+5x^2-13x+7} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2(x+7)} = 0$

6°. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x(2-3/x)}{-x\sqrt{1-1/x^2}} = -2$

7°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x} = 0$ en $\times$ par l'expression conjuguée.

8°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1})}{-(x-2)} = -\infty$

9°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{.}+\sqrt{..}} = 0$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{7x} = 4/7$

11°. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e$

12°. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+u)\ln(1+u)}{-u} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+u) = 1$

13°. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 0$

14°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b$ (par l'Hôpital).

15°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x} = \ln a - \ln b$ (par l'Hôpital).

16°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{e^x-1}{x}) = 1/2$

(en appliquant l'Hôpital 3 fois de suite).

17°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{x}}}{x^2-1} = e$ (par l'Hôpital).

18°.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-arcsinx}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1/\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{(1-x^2)^{3/2}\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{(1-x^2)^{3/2}} = -1$

19°. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x^4-16} = 1/32$ (par l'Hôpital).

20°. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{e\ln x - x}{x-e} = 0$ (par l'Hôpital).

21°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)}{x^2(\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha)} = \beta/\alpha$

22°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{2x} = 1/2$

23°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{1-\cos x} = +\infty$

24°. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e^{1/x}}{x-1} = 2e$ (par l'Hôpital).

25°. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)\times(1+x-E(x)) = +\infty$

car $1 \le 1+x-E(x) \le 2$

26°. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x + x + 1 - E(x)) = +\infty$ pour la même raison.

27°. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin^2(\dfrac{1}{x}))\times \ln x =$? ?

28°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+9}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}) =$
$1/2+1/4-1/6 = 7/12$

29°. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}})$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+\sqrt{.}}+\sqrt{x+\sqrt{.}}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x})\sqrt{x}(\sqrt{1+..})} = 1/2$

30°. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+...}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{1+\epsilon}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\epsilon}+\sqrt{x}} = 1/2$

VIII

1°. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$

$f(x)$ est définie ssi l'expression sous la racine carrée est strictement positive. On doit donc résoudre $|x|-1>0$. Ceci est équivalent à $x<-1$ ou $x>1$ (on rappelle que $|x| = x \iff x \ge 0$ et $|x| = -x \iff x \le 0$). Ainsi :

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

On trouve alors facilement que :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to\pm 1} f(x) = +\infty$ (cf. la courbe ci-dessous).

2°. $g(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}$

La fonction $g(x)$ est définie ssi $x \ne -1$ et $x \ne 0$. Donc :

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}/\{0;-1\}$
$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$ en réduisant à une simple fraction et
$\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$

3°. $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

La fonction est définie ssi $1+x \ge 0$ et $x \ne 0$. La première inégalité impose $x \ge -1$ et l'on en déduit donc que
$\mathcal{D}_h = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

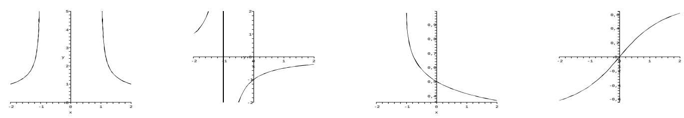
La fonction existe en -1 ; sa limite en ce point est donc égale à sa valeur $h(-1) = 0$. Le calcul des limites en 0 et l'infini se fait par la règle de l'Hospital :

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0$ et
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 1/2$

4°. $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

$\mathcal{D}_\phi = \mathbb{R}^*$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi(x) = \pm 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = 0$ par l'Hôpital.

Voici, dans l'ordre, les quatre courbres en question :



IX

1°. $\sqrt{x^5}$

Comme toute puissance entière impaire, la fonction x^5 est positive ssi $x > 0$. Ainsi, $f(x)$ existe ssi $x \geq 0$. En 0, la limite est égale à la valeur de la fonction, cad 0. Reste à voir la limite en $+\infty$; on a clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} = +\infty$

La courbe possède une branche parabolique d'axe $(0y)$ en $+\infty$

2°. $3x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

La fonction existe ssi $x > 0$ et l'on doit donc étudier les limites en 0 et en $+\infty$.

$f(x)$ s'écrit sous la forme de l'équation d'une droite et d'une fonction qui tend vers 0 en l'infini, donc $3x + 2$ est asymptote oblique en $+\infty$. On a également une asymptote verticale en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

3°. $3x + \sqrt{x}$

Le domaine de définition est $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 3$ et

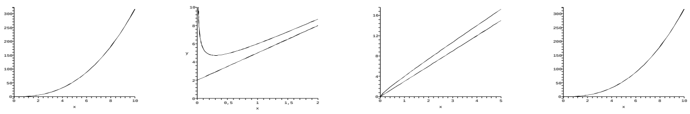
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Il s'agit d'une direction asymptotique d'équation $y = 3x$

4°. $3x^2 + \sqrt{x}$

Il s'agit presque de la même fonction. Cette fois, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$ et la courbe a donc une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$

Voici les courbes des quatre fonctions ci-dessus :



5°. $x + \cos x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ n'existe pas. Il s'agit donc d'une direction asymptotique d'équation $y = x$ en $+\infty$ et également en $-\infty$

6°. $\ln(x^{\frac{3}{4}} - 1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$ et la courbe possède donc une direction asymptotique d'axe (Ox) en $+\infty$. Elle possède également une asymptote verticale $x = 1$

7°. $\sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x}}$

Commençons par déterminer le domaine de définition de cette fonction. $f(x)$ existe ssi la fraction $(x^3 - 1)/x$ est positive et si $x \neq 0$. Le plus prudent est de faire un tableau de signe. Pour aller plus vite (mais ce n'est pas prudent) on peut également raisonner de la façon suivante : La fraction est positive quand numérateur et dénominateur sont de même signe. Or, $x^3 - 1 > 0$ ssi $x > 1$; les deux membres sont positifs quand $x > 1$ et négatifs quand $x < 0$. On en déduit donc que $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

Déterminons maintenant les branches en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En effet, la fraction sous le radical a la même limite que x^3/x qui tend vers l'infini.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3}} = \sqrt{1} = 1$$

Je rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x et que l'on peut donc faire rentrer un nombre positif sous un radical en l'élevant au carré.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{\bullet} - x)(\sqrt{\bullet} + x)}{(\sqrt{\bullet} + x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3 - 1 - x^3)/x}{(\sqrt{\bullet} + x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x(\sqrt{\bullet} + x)}$$

La racine carrée au dénominateur tend vers $+\infty$, la parenthèse aussi et finalement tout le dénominateur tend vers $+\infty$. La limite de $f(x) - x$ est donc nulle et l'on en déduit que $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$

Il faut recommencer la même démo en $-\infty$ (car la fonction n'est ni paire ni impaire). Les calculs sont les mêmes, à ceci près que lorsque $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Par conséquent, pour "faire entrer" x sous une racine carrée, il faut laisser un signe moins en facteur du radical. Cette remarque est très importante. Le calcul donne alors :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3}} = -\sqrt{1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x}{1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{\bullet} - x)(\sqrt{\bullet} + x)}{(\sqrt{\bullet} - x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3 - 1 - x^3)/x}{(\sqrt{\bullet} - x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x(\sqrt{\bullet} - x)} = 0$$

Ainsi, $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

Enfin, il reste à étudier la présence éventuelle d'asymptotes verticales. En $x = -1$, la fonction est définie et vaut $f(-1) = 0$. En 0, par contre

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \sqrt{\frac{-1}{x}} = +\infty$$

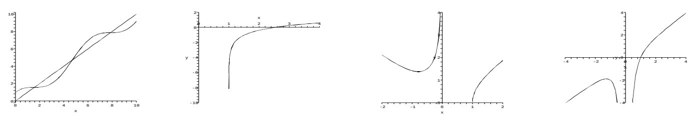
Donc (Oy) est asymptote verticale.

Vous pouvez regarder la courbe obtenue ci-dessous.

8°. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ et l'on a donc une asymptote verticale en 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ (idem en $-\infty$) donc $y = x$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

Voici les quatre courbes correspondant à 5°,6°,7°,8° :



9°. $\sqrt{x^2 - 1}$

La fonction est définie ssi $x^2 - 1 \geq 0$. Or, $x^2 - 1$ est positif à l'extérieur des racines -1 et 1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

La fonction est paire et on effectuera donc l'étude uniquement en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$ en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée. On en déduit donc que $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$. Par parité de la fonction, $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

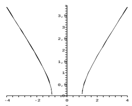
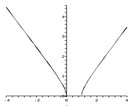
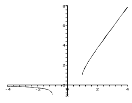
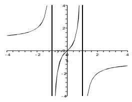
10°. $\sqrt{x^2 - x}$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -1/2$; $y = x - 1/2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $y = -x - 1/2$ est asymptote en $-\infty$

11°. $x+\sqrt{x^2-1}$
$\mathcal{D}_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = 0$; $y=2x$ est asymptote oblique en $+\infty$. La limite étant nulle en $-\infty$, la courbre admet également $(0x)$ comme asymptote horizontale.

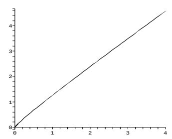
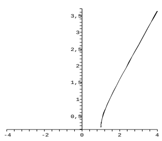
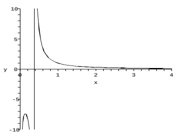
12°. $\dfrac{x}{1-|x|}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$; la courbe admet une asymptote horizontale $x=-1$ en $+\infty$ et $x=1$ en $+\infty$ par imparité. Par ailleurs, $x=1$ et $x=-1$ sont asymptotes verticales.

13°. $\sqrt[3]{x^3+x^2\sqrt{x}}$
f est définie sur $\mathbb{R}_+$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$ donc $y=x$ est une direction asymptotique en $+\infty$

14°. $(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = -1/3$ donc $y = x-1/3$ est asymptote oblique en $+\infty$.

15°. $\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$
$\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty$. De façon évidente, la courbe possède deux asymptotes verticales en $x=0$ et $x=1$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc (Ox) est asymptote horizontale à la courbe.

X

1°. $f(x)=\sqrt{4x^2-x+1}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = -1/4$
donc $\Delta : y = 2x-1/4$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $\Delta : y=-2x+1/4$ est asymptote oblique en $-\infty$ de la même façon.

2°. Soit $g(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+mx$
Déterminer m pour que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$
Il faut prendre $m=-1$

XI

1°. $\lim_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4-x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{-x^2}{2x^2} = -1/2$
car $1-\cos x \sim x^2/2$, $x^4-x^2\sim -x^2$, $1+2x\sim 1$

2°. $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln\cos x}{1-\cos 2x} = -1/4$
car $\ln\cos x = \ln(1+\cos x-1)$, $\cos x - 1 \sim -x^2/2$, $\ln(1-u)\sim -u$, $1-\cos 2x = 2\sin^2 x \sim 2x^2$

3°. $\lim_{x\to0^+} \ln x \tan(\ln(1+x)) = \lim_{x\to0} x\ln x = 0$

4°. $\lim_{x\to0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} e^{\ln(1+\sin x)/x} = e$
car $\sin x\sim x$, $\ln(1+\sin x)\sim x$

5°. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\dfrac{3x}{2x} = 3/2$

6°. $\lim_{x\to0} \dfrac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\dfrac{xe^x}{x} = 1$

7°. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 3x\tan x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\dfrac{3x\times x}{x^2/2} = 6$

8°. $\lim_{x\to0} \dfrac{2\ln(1+x)}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to0}\dfrac{2x}{-2x} = -1$

9°. $\lim_{x\to0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\dfrac{x\times x}{x^2/2} = 2$

10°. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$

$\lim_{x\to0^-} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = -2\sqrt{2}$ car $\sin 2x \sim 2s$,
$1-\cos x = 2\sin^2 x/2$ donc $\sqrt{1-\cos x}\sim\sqrt{2}|x|/2$

11°. $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1-u)}{\sqrt{1-u}-1} = 2$
car $\ln(1-u)\sim -u$ et $\sqrt{1-u}-1\sim -u/2$

12°. $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1-u)}{e(e^u-1)} = \dfrac{1}{e}$
car $\ln(1-u)\sim -u$, $e^{-u}-1\sim -u$

13°. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{2x}-x^3}{\ln x - x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{2x}}{-x^2e^x} = -\infty$

14°. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-x^2}{(2e^x-x\ln x)^2} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{(2e^x)^2} = 1/4$

15°. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = 2/5$
car $\sin 2x\sim 2x$ et $\sin 5x\sim 5x$

16°. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin(3x^3+x^5)}{1-\cos(5x^3)} = +\infty$
$\sin(3x^3+x^5)\sim 3x^3$, $1-\cos(5x^3)\sim 25x^6/2$ donc $\frac{\sin(3x^3+x^5)}{1-\cos(5x^3)} \sim 6/25x^3$

XII

$\lim_{x\to0} (\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$

1°. $\lim_{x\to0} \dfrac{a^x+b^x}{2(1+\frac{x}{2}(\ln a+\ln b))} = \lim_{x\to0}\dfrac{\ln a.a^x+\ln b.b^x}{\ln a+\ln b} = 1$

2°. $\dfrac{a^x+b^x}{2} \sim (1+\dfrac{x}{2}(\ln a+\ln b))$ d'après ci-dessus.

Hélas, on ne peut pas passer au ln des deux côtés de l'équivalent puisque la limite commune de ces expressions est 1 (cf. cours).

3°. Nous utilisons alors la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{x}{2}(\ln a+\ln b)\right)} = \lim_{x\to0}\frac{(\ln a a^x+\ln b b^x)(1+\ln(ab)x/2)}{(a^x+b^x)\ln(ab)/2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2(1+x/2\times\ln(ab)}{a^x+b^x} = 1$$

D'après ce qui précède. Ainsi :

$\lim_{x\to0} (\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$
$= \lim_{x\to0}\exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x\ln\sqrt{ab})\right) = \sqrt{ab}$