Calculs de transformées et d'originaux.

I.

Calculer les transformées de Laplace $F(p)$ des fonctions ci dessous (on supposera toutes les fonctions causales).

1°. $\delta_0(t)$ 2°. $H(t)$ 3°. t 4°. t^2 5°. $t^n \in \mathbb{N}$ 6°. $t^n e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

7°. $\cos \omega t$ 8°. $\sin \omega t$ 9°. $e^{-\alpha t} \cos \omega t$ 10°. $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ 11°. $\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ 12°. $\mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \mathbb{1}_{]1,2]}(t)$

13°. $\sinh t$ 14° $\cosh t$ 15°. $\cosh(\omega t)$ 16°. $\sinh(\omega t)$ 17°. $e^{-\alpha t} \cosh(\omega t)$ 18°. $e^{-\alpha t} \sinh(\omega t)$

δ_0 est la masse de Dirac en 0 et $H(t)$ la fonction de Heaviside.

II.

Soit $f(t)$ une fonction causale périodique de période 2π. On pose $f_n(t) = f(t)$ si $t \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[$ et 0 sinon. Soit $H(t)$ la fonction indicatrice de $[0, +\infty[$.

1°. Démontrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ et que $f_n(t) = f_0(t - 2n\pi)\ H(t - 2n\pi)$. En déduire que $F(p) = \dfrac{F_0(p)}{1 - e^{-2\pi p}}$

2°. Calculer la transformée de Laplace de la fonction 2π périodique $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = 0$ sinon.

III.

Calculer les originaux des fonctions ci-dessous.

1°. $\dfrac{1}{p^2 - 9}$ 2°. $\dfrac{1}{p^2 + 3p + 2}$ 3°. $\dfrac{1 - e^{-2p}}{p^2 + 3p + 2}$ 4°. $\dfrac{p}{p^2 + 4p + 13}$ 5°. $\dfrac{2p + 1}{p^2(p^2 + 4)}$

6°. $\dfrac{p^2}{p^2 + p - 6}$ 7°. $\dfrac{2p + 1}{p^2 - 4p + 20}$ 8°. $\dfrac{p}{(p-1)^2(p+2)}$ 9°. $\dfrac{p + 1}{p^2 + p + 1}$ 10°. $\dfrac{pe^{-\frac{p\pi}{10}}}{p^2 + 9}$

IV.

Soit $G(u) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{u}{u^2 + 1}$ pour $u \neq 0$.

1°. Calculer $\displaystyle\int_p^{+\infty} G(u)du$

2°. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = (1 - \cos t)H(t)$ où $H(t)$ fonction de Heaviside.

3°. En déduire celle de $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t} H(t)$ puis celle de $h(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t} e^{-3t} H(t)$

V. Quelques propriétés de la fonction Gamma.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha - 1} e^{-t} dt$

1°. Montrer que Γ existe si et seulement si $\alpha > 0$ et que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

2°. Montrer que la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^\alpha$ est $F(p) = \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha + 1}}$

3°. Quels résultats obtient-on si $\alpha \in \mathbb{N}$?

5°. On admet que $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Calculer alors la transformée de Laplace de $\sqrt{t}$

VI.

Soit $F(p) = \ln(1 + \dfrac{1}{p^2})$

1°. Calculer $F'(p)$ et en déduire l'original de F.

2°. Déterminer les transfos de Laplace de $\dfrac{\sin t}{t}$ et $\dfrac{\sinh t}{t}$.

3°. Calculer la transformée de $\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

Résolutions d'équations différentielles.

VII.

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de Laplace (les fonctions sont causales).

1°. $\begin{cases} y' + 2y = 2t - 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 2°. $\begin{cases} y'' + y' + y = \sin t \\ y'(0) = 1 \ ; \ y(0) = 0 \end{cases}$ 3°. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 0 \end{cases}$

VIII. Equation et fonction de Bessel.

Les fonctions de Bessel jouent un rôle important dans les phénomènes vibratoires et en télécommunications.
On définit provisoirement la fonction de Bessel $J_0(t)$ comme étant l'original de $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

1°. Résoudre par la méthode de Laplace l'équation $ty'' + y' + ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

2°. Résoudre de la même façon l'équation $ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

IX.

On considère l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = f(t)$ avec $f(t) = \mathbb{1}_{[0,\pi/2[}(t) - \mathbb{1}_{[\pi/2,\pi[}(t)$ et $y(0) = y'(0) = 0$

1°. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et calculer sa transformée de Laplace.

2°. Déterminer l'original de $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ puis celui de $\dfrac{e^{-ap}}{p(p^2+1)}$ pour $a > 0$.

3°. En déduire la solution de l'équation initiale.

Applications à l'électronique.

X.

On considère un système physique avec une entrée $x(t)$ et une sortie $y(t)$ causales et admettant des transfos de Laplace $X(p)$ et $Y(p)$ telles que $Y(p) = \dfrac{X(p)}{1+p}$

1°. On considère un signal d'entrée $x(t) = t \times \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

2°. Montrer que $X(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+p}{p^2}e^{-p}$

3°. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{p^2(1+p)}$ et déterminer $y(t)$ pour $t \in]-\infty, 0[$, $t \in [0,1[$ et $t \in [1, +\infty[$.

4°. Etudier la fonction y.

XI. Etude d'un circuit RL.

On considère un système RL dont on cherche l'intensité $i(t)$ en fonction du temps. La force électromotrice $e(t)$ appliquée à ce circuit est une impulsion rectangulaire donnée par $e(t) = E \times \mathbb{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, $E \in \mathbb{R}$.
On admet que i est alors une fonction causale, continue sur $]0, +\infty[$ et dérivable par morceaux et que l'équation régissant l'évolution du circuit est

$$L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = e(t)$$

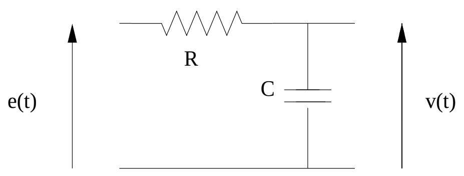
1°. Déterminer la transformée de Laplace de $e(t)$.

2°. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{p(Lp+R)}$ et en déduire les originaux de $\dfrac{1}{p(Lp+R)}$ et $\dfrac{e^{-\tau p}}{p(Lp+R)}$, $\tau > 0$

3°. En déduire la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $i(0) = 0$ et en donner les expressions sur les intervalles $[0, t_1[$, $[t_1, t_2[$ et $[t_2, +\infty[$.

XII. Etude d'une cellule RC.

On considère une cellule RC en série dont $u(t)$ représente le signal en entrée et $v(t)$ le signal en sortie. On notera $H(t)$ la fonction de Heaviside. On suppose que $u(t) = E \times \mathbb{1}_{]0,T]}(t)$



1°. Montrer que le circuit est piloté par l'équation $\begin{cases} RCv'(t) + v(t) = u(t) \\ v(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$

On supposera $v(t)$ de classe C^0 sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

2°. Représenter $u(t)$.

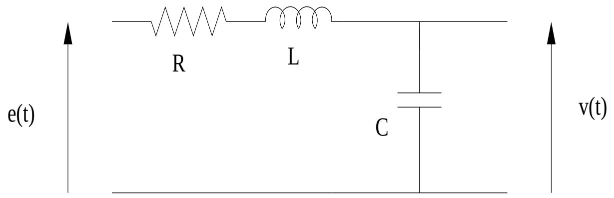
3°. Déterminer la transformée de Laplace des deux membres de l'équation et en déduire $V(p)$ en fonction de $U(p)$. Démontrer que

$$V(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}\right)(1 - e^{-pT})$$

4°. En déduire l'expression de $v(t)$ et l'allure de sa courbe représentative.

XIII. Intensité dans une cellule RLC série.

On considère un circuit RLC où le condensateur, la résistance et l'inductance sont montés en série sur un générateur délivrant une tension $e(t)$. Soi $i(t)$ l'intensité parcourant le circuit au temps t.



On rappelle que l'évolution du circuit au cours du temps est donné par l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} = \frac{de}{dt}$$

Les conditions initiales sont $e(0) = 0$, $i(0) = 0$ et $i'(0) = 0$

1°. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ du circuit en fonction de R,L et C.
Dans toute la suit de l'exercice, on pose $L = 1\ H$, $R = 10\ \Omega$ et $C = 4000\ \mu F$.

2°. Vérifier que $G(p) = \dfrac{p}{(p+5)^2 + 15^2}$ et déterminer l'original de $H(p)$.

3°. On applique au circuit une tension $e(t) = H(t-1) - H(t-3)$, $H(t)$ étant la fonction de Heaviside.
Représenter $e(t)$, calculer $E(p)$ et en déduire $i(t)$

4°. On alimente le circuit par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega > 0$.
Calculer le gain du système (c'est le réel $r(\omega) = |G(i\omega)|$).

5°. On pose $f(u) = u^2 - 400 + \dfrac{62500}{u^2}$
Etudier f, expliciter le rapport entre f et r puis déterminer la valeur de ω pour laquelle r est maximum.

6°. Calculer $\displaystyle\lim_{\omega \to +\infty} r(\omega)$

XIV. Etude d'un circuit RLC.

On reprend le même circuit RLC que ci-dessus. On supposera que $v(0) = v'(0) = 0$ et l'on notera $H(p)$ la fonction de transfert de ce circuit.

1°. Démontrer que

$$H(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

2°. En posant $\omega^2 = 1/(LC)$ et $m = RC\omega/2$, exprimer $H(p)$ en fonction de ω, m et p.

3°. On suppose que $e(t) = E \times \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Calculer $V(p)$ puis en déduire $v(t)$ en fonction de m, ω et t (on distinguera $m > 1$, $m < 1$ et $m = 1$).

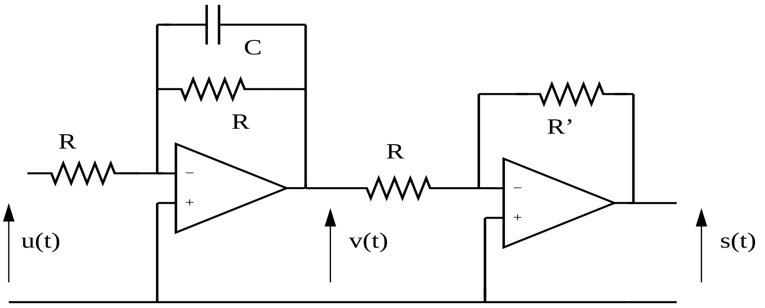
4°. Dans le cas où $m = 1$, tracer l'allure de la courbe représentative de $s(t)$.

XV. Ampli opérationnel.

Dans le montage ci-dessous, deux amplificateurs opérationnels sont montés en série. On note $u(t)$ la tension en entrée, $s(t)$ la tension en sortie et $v(t)$ la tension intermédiaire après le premier ampli. La résistance R' s'exprime en fonction de R par la relation $R' = \alpha R$. Nous noterons $h(t)$ la fonction de transfert de ce montage et $H(p)$ sa transformée de Laplace.

1°. Démontrer que $H(p) = \dfrac{\alpha}{1 + RCp}$

2°. On suppose que $u(t) = Et$. Calculer $U(p)$, en déduire $V(p)$ puis $v(t)$.



3°. Démontrer que $v(t)$ s'exprime comme somme de deux termes dont on donnera la signification.

4°. Déterminer α pour que $\lim_{t\to+\infty}(s(t)-u(t))$ existe. Quelle est alors sa valeur ?