MATHEMATIQUES TD N°5 : CALCUL INTEGRAL - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Intégration directe

1°. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - 1)dx = [-\ln\cos x - x]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{2\ln 2 - \pi}{4}}$

2°. $\int_4^8 \frac{2x}{x^2-4}dx = [\ln|x^2-4|]_4^8 = \boxed{\ln 5}$

3°. $\int_{-1}^2 \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}dx = \sqrt{2x^2+2x+1}]_{-1}^2 = \boxed{\sqrt{13}-1}$

4°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx = \frac12 \ln|1+2\sin x|]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac12\ln 3}$

5°. $\int_1^2 (1-\frac{1}{x+1})dx = (x-\ln|x+1|)_1^2 = \boxed{1+\ln\frac23}$

6°. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan 2x}{\cos^2(2x)}dx = \frac14(\tan^2(2x))_0^{\pi/6} = \boxed{\frac34}$

7°. $\int_0^1 (t^2+t)dt = (\frac13 t^3 + \frac12 t^2)_0^1 = \boxed{\frac56}$

8°. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t\,dt = (-\cos t)_{-\pi/6}^{\pi/3} = \boxed{\frac{\sqrt3-1}{2}}$

9°. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)]_0^1 = \boxed{\ln 2}$

10°. $\int_1^e \frac1x\sqrt{1+\ln x}\,dx = \frac23(\ln x+1)^{3/2}]_1^e = \boxed{\frac{4\sqrt2-2}{3}}$

11°. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac12\ln(x^2+2x+3)]_0^1 = \boxed{\frac12\ln 2}$

12°. $\int_{-1}^4 (x^3+3x^2-1)dx = (\frac14x^4+x^3-x)_{-1}^4 = \boxed{\frac{495}{4}}$

II. Intégration par parties

1°. $\int_1^e x^2\ln x\,dx = (\frac13x^3\ln x)_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \boxed{\frac{2e^3+1}{9}}$

2°. $\int_0^{\frac12}\arcsin x\,dx = (x\arcsin x)_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$= \boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt3}{2}-1}$

3°. $\int_1^e(\ln x)^2dx = (x\ln^2 x)_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = \boxed{e-2}$

4°. $\int_0^\pi e^x\cos x\,dx = I$

En effectuant une double intégration par parties, on a $I = -e^\pi - 1 - I$ d'où $\boxed{I = -\frac{e^\pi+1}{2}}$

5°. $\int_0^1 t^2e^t dt = (t^2e^t)_0^1 - 2\int_0^1 te^t dt = \boxed{e-2}$

6°.
$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}dt = (t\tan t)_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3}\tan t\,dt = \boxed{\frac{\pi\sqrt3}{3} - \ln 2}$

7°. $\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$
$= \left[-\frac23(3-x)^{3/2}\right]_0^3 + \frac23\int_0^3(3-x)^{3/2}dx$
$= -\frac23\times\frac25(3-x)^{5/2}]_0^3 = \boxed{\frac{12}{5}\sqrt3}$

8°. $\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \ln x\ln(\ln x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2}\frac{dx}{x} = \boxed{2\ln 2 - 1}$

III. Fractions rationnelles

1°. $\int_2^3 \frac{3x+1}{x^2-1}dx = \int_2^3\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \boxed{\ln\frac{16}{3}}$

2°. $\int_2^3\frac{x^2+1}{x-1}dx = \int_2^3\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \boxed{\frac72+2\ln 2}$

3°. $\int_1^2\frac{dx}{x(1+x)^2} = \int_1^2\left(\frac1x - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$
$= \boxed{\ln\frac43 - \frac16}$

4°. $\int_0^1\frac{x-2}{(2x-3)^2}dx = \frac12\int_0^1\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{(2x-3)^2}\right)dx$
$= \boxed{-\frac16 - \frac14\ln 3}$

5°. $\int_{-1}^0 \frac{t^2-5}{t-1}dt = \int_{-1}^0(t-\frac{4}{t-1})dt = \boxed{\frac12+4\ln 2}$

6°. $\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx$

Soit $F(x)$ la fraction à intégrer. On a $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ Donc $F(x) = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ avec $A = 1/3$ est le résidu d'un pôle simple et B et C se calculent en utilisant deux astuces ($\times x \to +\infty$ et $x = 0$). On obtient finalement : $F(x) = \frac13\frac{1}{1+x} - \frac16\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac12\frac{1}{x^2-x+1}$ D'où
$I = \frac13\ln(1+x)_0^1 - \frac16\ln|1-x+x^2|_0^1 + K$ avec
$K = \frac12\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} = \frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt3}(x-1/2)\right)_0^1$
$\boxed{I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt3}}$

7°. $\int_0^{\sqrt3}\frac{u^2}{u^2+3}du = \int_0^{\sqrt3}(1-\frac{3}{u^2+3})du = \sqrt3(1-\frac{\pi}{4})$
puisque $\frac{3}{x^2+3} = \boxed{\frac{1}{1+(x/\sqrt3)^2}}$ et s'intègre en arctan

8°. $\int_1^2\frac{2x^4+x^3+3x^2+3x+2}{x^2(x+1)}dx$
$\int_1^2\left(2x-1+\frac1x+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x+1}\right)dx = \boxed{3+\ln\frac{27}{4}}$

9°. $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+2x+4} = \frac13\int\frac{dx}{1+((x+1)/\sqrt3)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\rfloor_{-1}^{1}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}}$

10°. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3-8}du$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ la décomposition en élements simples de la fraction donne
$\frac{1+x}{x^3-8}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x^2+2x-4}\right)$ et
$\boxed{I=-\frac{1}{8}\ln 7+\frac{\sqrt{3}}{12}\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3})-\frac{\sqrt{3}\pi}{72}}$

11°. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3-1}$

$\frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+2x-4}$ avec $a=1/3$, $b=-1/3$ et $c=-2/3$ $\boxed{I=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2}$

12°. $\int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)}dx$

$=\int_0^1(1+\frac{1/2}{(1+x)^2}-\frac{3/2}{1+x}-\frac{1/2}{1+x^2})dx=\boxed{\frac{5-7\ln 2}{4}}$

IV. Changement de variables

1°. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$, $u=\frac{1}{x}$

$=\int_{1/2}^1(1-\frac{1}{1+u^2})du=\boxed{\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}}$

2°. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $u=\frac{1}{x}$. On a $du=\frac{-dx}{x^2}$

$=\int_{-1/2}^{-1}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\boxed{\text{argsh}\frac{1}{2}-\text{argsh}1}$

3°. $\int_1^2\frac{x^3}{(1+x^4)^2}dx$, $u=x^4$. On a $du=4x^3dx$

$=\int_1^{16}\frac{du}{4(1+u)^2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{1+u}\rfloor_1^{16}=\boxed{\frac{15}{136}}$

4°. $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}dt$, $u=\sqrt{t}$. On a $dt=2udu$

$\boxed{=2e-2e+2=2}$

5°. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)dx$, $u=x^2$. On a $du=2xdx$

$=\int_0^{\pi/4}\tan u\frac{du}{2}=-\frac{1}{2}\ln\cos u\rfloor_0^{\pi/4}=\boxed{\frac{1}{4}\ln 2}$

6°. $\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}(x+3)}dx$, $u=\sqrt{x}$. On a $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2du}{3+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{3}})\rfloor_1^{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{18}}$

7°. $\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{5sh(x)-4ch(x)}$, $u=e^x$. On a $dx=\frac{du}{u}$

$=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{5(u-1/u)-4(u+1/u)}\frac{du}{u}=\int_0^{\ln 2}\frac{du}{u^2-9}$

$=\frac{1}{3}\int_0^2(\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u+3})du=\boxed{-\frac{1}{3}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2}$

8°. $\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}dx$, $u=\arctan x$. On a $du=\frac{dx}{1+x^2}$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{du}{1+\tan^2 u}=\int_0^{\pi/4}\cos^2 u\ du=\boxed{\frac{\pi+2}{8}}$

9°. $\int_{-7}^{-3}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$, $cht=-\frac{x+1}{2}$.

On a $dx=-2sh(t)dt$, $x^2+2x-3=4sh^2t$ et
$I=\int_0^\alpha 2(1+ch(t))dt=\boxed{-4\sqrt{2}+2\ln(3-2\sqrt{2})}$ en notant $\alpha=argch3$

10°. $\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{1/x}dx$, $u=\frac{1}{x}$. On a $du-dx/x^2$

$\boxed{=(-e^u)_1^{1/2}=e-\sqrt{e}}$

11°. $\int_{-1}^1\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$, $u=\sqrt{x+1}$

On a $du=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ donc

$I=2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{du}{1+u^2}=\boxed{2\arctan\sqrt{2}}$

12°. $\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$, $u=\sqrt{x}$

$=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{u^2}{u^2+3}du=....\boxed{=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-2}$

13°. $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}\ln(1+e^x)dx$, $u=e^x$

$=\int_1^e\frac{\ln(1+u)}{1+u}du=\frac{1}{2}(\ln(1+u))^2\rfloor_1^e=\boxed{\frac{1}{2}\ln^2(1+e)-\frac{1}{2}\ln^2 2}$

14°. $\int_1^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}dt$, $u=\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$

On a $u^2=\frac{t-1}{t+1}$ donc $2udu=\frac{2dt}{(1+t)^2}$ et $t=\frac{1+u^2}{1-u^2}$
$I=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{4u^2}{1-u^4}du=\int(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{1+u^2})du$
$\boxed{=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{3}}$

15°. $\int_0^2\frac{2dx}{(x^2+4)^{3/2}}$, $x=2\tan t\iff dx=2\frac{dt}{\cos^2 t}$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{2}{\sqrt{4(\tan^2 t+1)}}\frac{\cos^2 t}{4}2\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos t\ dt=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

16°. $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $u=argshx\iff du=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\int_0^\alpha sh^2u\ du=\frac{1}{2}\int_0^\alpha(ch(2u)-1)du=\frac{1}{2}sh(2u)\rfloor_0^\alpha-\frac{u}{2}\rfloor_0^\alpha$
avec $\alpha=argsh1=\ln(\sqrt{2}-1)$ et
$\boxed{I=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)}$

17°. $\int_0^1 \frac{t\sqrt{t}}{t^2-16}dt$, $t=u^2$

$= 2\int_0^1 \frac{u^4}{u^4-16}du$

La fraction se décompose en $1+\frac{a}{u-2}+\frac{b}{u+2}+\frac{cu+d}{u^2+4}$ $a=1/2$, $b=-1/2$, en $\times$ par x^2+4 et en posant $x=2i$, on a $c=0$ et $d=-2$ et $\boxed{I=2-\ln 3-2\arctan(1/2)}$

18°. $\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{u})}{u\sqrt{u}}du$, $t=\sqrt{u} \iff du=2tdt$

$= \int_1^2 \frac{1}{t^3}\ln(1+t)2tdt = 2\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$

$= \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)} = \boxed{6\ln 2-3\ln 3}$

V. Intégrales trigonométriques

1°. $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos(2t)}dt$, $x=\cos t \Rightarrow dx=-\sin tdt$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan x\rfloor_{-1}^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

2°. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$, $u=\cos x$

$= \int_{\sqrt{2}/2}^0 \frac{-du}{(1+2u)(1-u^2)} = \boxed{\frac{1}{3}\ln 2-\frac{}{3}\ln(\sqrt{2}-1)}$

En décomposant en éléments simples.

3°. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^4 x}$, $x=\arctan t \iff dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{1/\sqrt{3}}(1+t^2)dt = \boxed{\frac{10\sqrt{3}}{27}}$

4°. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\sin^2 x\ dx$, $u=\sin x$

$= \left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)_0^{\sqrt{2}/2} = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{120}}$

5°. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}dx$, $u=\tan x$

$= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1+t}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t}$

$\boxed{=\ln(2+\sqrt{3})}$

6°. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$,

$u=cotanx \iff du=-\frac{dx}{\sin^2 x}=-(1+u^2)dx$

$= (u+\frac{1}{3}u^3)_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}$

7°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$, $t=\tan\frac{x}{2}$

$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})))_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

8°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$, $t=\tan\frac{x}{2} \iff dx=2\frac{dt}{1+t^2}$

$= \int_0^1 \frac{2dt}{3/2+t^2/2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+(t/\sqrt{3})^2} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

VI. Intégrales de Fourier

On note $I_k=\int_0^{2\pi} x^k\cos(nx)dx$ et

$J_k=\int_0^{2\pi} x^k\sin(nx)dx$, $n,k\in\mathbb{N}$

1°. Exprimer I_{k+1} et J_{k+1} en fonction de I_k et J_k

$I_{k+1}=\int_0^{2\pi} x^{k+1}\cos(nx)dx = \left[\frac{1}{n}x^{k+1}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} - \frac{k+1}{n}J_k$

$\boxed{I_{k+1}=-\frac{k+1}{n}J_k}$

$J_{k+1}=\int_0^{2\pi} x^{k+1}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n}x^{k+1}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \frac{k+1}{n}I_k$

$\boxed{J_{k+1}=\frac{k+1}{n}I_k-(-1)^n\frac{(2\pi)^{k+1}}{n}}$

2°. Calculer I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2

$J_0=0$, $J_1=-\frac{2\pi}{n}$, $J_2-\frac{4\pi^2}{n}$, $I_0=I_1=0$, $I_2=\frac{4\pi}{n^2}$

3°. Mêmes questions en remplaçant la valeur 2π de la borne supérieure des intégrales par la valeur π.

$J'_0=\frac{1-(-1)^n}{n}$, $J'_1=\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}$,

$J'_2=-\frac{1}{n^3}(n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2)$

$I'_0=0$, $I'_1=\frac{(-1)^n-1}{n^2}$, $I'_2=2\pi\frac{(-1)^n}{n^2}$

VII. Calcul par récurrence

On considère $K_n=\int_0^1 x^ne^{-x}dx$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1°. Calculer K_0, K_1, K_2

$K_0=\int_0^1 e^{-x}dx=(-e^{-x})_0^1=1-\frac{1}{e}$

$K_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=(-xe^{-x})_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$

2°. $K_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)K_n$ en intégrant par parties.

3°. $K_2=-\frac{1}{e}+3(1-\frac{2}{e})=3-\frac{7}{e}$ et $K_3=12-\frac{29}{e}$

Par linéarité de l'intégrale,

$K=-K_3+2K_2-K_1=-7+\frac{17}{e}$

4°. Soit $P(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k\in\mathbb{R}[X]$

$\int_0^1 P(x)e^{-x}dx=\sum_{k=0}^n\int_0^1 x^ke^{-x}dx=\sum_{k=0}^n a_kK_k$

VIII. Intégrales de Wallis

Soient $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1°. Calculer I_0, I_1, I_2 et J_0, J_1, J_2

$I_0 = J_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = J_1 = (\sin t)_0^{\pi/2} = 1$

$I_2 = J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$

$= \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2t\right)_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{4}$

2°. $I_n = J_n$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$ dans l'une des deux intégrales

$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ en effectuant une double intégration par parties.

3°.
$I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = ... = \dfrac{(2p-1)(2p-3)...3}{2p(2p-2)...2} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\dfrac{\pi}{2}$
et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}$ de la même façon.

4°. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx$ en posant $x = \sin u$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 u(1-\sin^2 u)du = I_4 - I_6 = \frac{\pi}{32}$

5°. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\cos^2 u)du = I_2 - I_4 = \frac{\pi}{16}$

IX.

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(\cos x)dx$

1°. Calculer I en posant $t = \sin x \iff dx = dt/\cos x$

$I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\cos^2 x} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1-t^2}$

$= \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} (\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})dt$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

2°. On intègre par parties :

$J = [\sin x \ln\cos x]_0^{\pi/4} + \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

3°. La seconde intégrale vaut
$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} - \int_0^{\pi/4} \cos x\ dx$

$= I - (\sin x)_0^{\pi/4} = I - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln 2)$

X.

1°. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\rfloor_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\ln 3$

$I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin 2x}{1+2\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1+2\sin x)}{1+2\sin x}dx$
$= (\sin x)_0^{\pi/2} = 1$

$J = 1 - I = 1 - \dfrac{1}{2}\ln 3$

2°. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

$I + J = \dfrac{\pi}{2}$ et

$I - J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u'}{u} = -\ln(\sin x + \cos x)\rfloor_0^{\pi/2} = 0$
$\Rightarrow I = J = \pi/4$

XI.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ dx$

1°. Calculer I_0 et montrer que $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$

$I_0 = [-\dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}]_0^1 = \dfrac{2}{3}$

$I_n = -\dfrac{2}{3}[x^n(1-x)^{3/2}]_0^1 + \dfrac{2n}{3}\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)(1-x)^{1/2}dx$

$I_n = 0 + \dfrac{2n}{3}\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{1/2}dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n(1-x)^{1/2}dx$

$I_n = \dfrac{2n}{3}I_{n-1} - \dfrac{2n}{3}I_n \iff (2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$

2°. En déduire que $I_n = \dfrac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

On a $I_1 = \dfrac{2}{5}\dfrac{2}{3}$, $I_2 = \dfrac{4}{7}I_1$, etc. En effectuant le produit des n premières équations, toutes les intégrales se simplifient et l'on obtient :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}\frac{2n-2}{2n+1}...\frac{2}{5}\frac{2}{3} = 2\frac{2^n n!(n+1)!2^n}{(2n+3)!}$$

XII.

Soient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et
$K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\ dx$

Soit $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

1°. Calculer $f'(x)$ et en déduire I.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ et l'on a donc

$I = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) = \ln(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})$

2°. Montrer que $K = 2I + J$ et $K = \sqrt{3} - J$. En déduire J et K.

$2I + J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{2+x^2}dx = K$ et par intégration par parties, $K = \sqrt{3} - J$

On a donc $J = I - \sqrt{3}/2 = \ln(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}) - \sqrt{3}/2$

et $K = -\ln(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}) + \sqrt{3}/2$

XIII.

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\ dx$, $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0 et I_1 et montrer que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$

$I_0 = \displaystyle\int_1^e x\ dx = (e^2-1)/2$, $I_1 = \displaystyle\int_1^e x\ln x dx = 1/2$ en intégrant par parties.

$I_n = [\frac{1}{2}x^2(\ln x)^n]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}dx$
$I_n = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}I_{n-1} \Rightarrow 2I_n + nI_{n-1} = e^2$

2°. Calculer I_2

En utilisant la relation de récurrence,
on a $I_2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

3°. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

$\forall x \in]1, e[$, on a $0 < \ln x < 1$ et par suite, $(\ln x)^n$ est une suite décroissante. L'intégration respectant la relation d'ordre, on en déduit que $(I_n)_n$ est décroissante.

De $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ on a
$(n+2)I_n \leq 2I_n + nI_{n-1} = e^2 \Rightarrow I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$
De la même façon, $I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$

4°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

La double inégalité précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e^2$

XIV.

Soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \ n > 0$

1°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]1, e[, (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$ et montrer que $(I_n)_n$ est décroissante.

Il s'agit du même type d'exercice que précédemment. Reportez-vous au corrigé précédent...
$\forall x \in]1, e[$, $0 < \ln x < 1$ et donc $(\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n$.
L'intégrale respectant la relation d'ordre, on en déduit que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

2°. Calculer I_1 et montrer que $\forall n > 0$,
$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

$I_1 = \int_1^e \ln x dx = (x\ln x - x)_1^e = 1$

$I_{n+1} = [x(\ln x)^n]_0^1 - \int_1^e x(x+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n dx$
$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3°. En déduire I_2, I_3, I_4

$I_2 = e - 2I_1 = 2$, $I_3 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$ et
$I_4 = e - 4I_3 = 9e - 24$

4°. Montrer que $I_n \geq 0$ et que $(n+1)I_n \leq e \ \forall n > 0$

$\ln x > 0$ sur $]1, e[$ donc $I_n \geq 0$ et d'après la relation de récurrence, $e - (n+1)I_n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

5°. Calculer $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

$nI_n = e - I_{n+1} - I_n \Rightarrow nI_n + (I_n + I_{n-1}) = e = \text{cte}$
On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$

XV.

Soit $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\ dx$, $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0, I_1 et montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx = \frac{4\sqrt{2}}{15}$ en intégrant par parties.
et $0 < x < 1 \Rightarrow (x^n)_n$ décroissante et par suite $(I_n)_n$ aussi.

2°. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

Il suffit d'établir la relation de récurrence et de procéder comme dans l'exercice précédent.

4°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Idem exercice précédent.

XVI.

Soient $I = \int_0^\pi \cos^4 x\ dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x\ dx$

1°. Montrer que $I = \int_0^\pi \cos x(\cos x - \cos x\sin^2 x)\ dx$

$\cos^4 x = \cos^2 x\cos^2 x = \cos^2(1 - \sin^2 x) = \cos x(\cos x - \cos x\sin^2 x)$

2°. Montrer que $I = \int_0^\pi \sin^2 x)\ dx - \frac{1}{3}I$

En intégrant par parties, on obtient :
$I = [\cos x(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)dx$
$= \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}I$

3°. Montrer que $J = \int_0^\pi \cos^2 x\ dx - \frac{1}{3}J$

Idem ci-dessus.

4°. Montrer que $I + J = 3\pi/4$ et que $I = J$. En déduire I et J.

$I + J = \frac{3}{4}\int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \frac{3}{4}\pi$
En effectuant le changement de variables $t = \pi/2 - x$ on voit facilement que $I = J$
Ainsi, $I = J = \frac{3\pi}{8}$

5°. Retrouver ces résultats en linéarisant $\sin^4 x$ et $\cos^4 x$

$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 6))$
$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 6x\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{4}$

Idem avec $\sin^4 x$

XVII.

Soient $f(x) = \frac{\ln x + ex}{x^2}$, $g(x) = -2\ln x - xe + 1$,
$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right) dt$ et $J_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt \ \forall n \in \mathbb{N}$

1°. Etudier $g(x)$. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α. En déduire le signe de $g(x)$.

f et g sont définies sur $]0, +\infty[$ et l'on a
$g'(x) = -\frac{2}{x} - e < 0$ sur le domaine de définition. Par

suite g est décroissante. Comme $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires (g est continue), on en déduit l'existence d'une unique valeur α telle que $g(\alpha) = 0$. Si $x < \alpha$, $g(x) > 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) < 0$.

2°. Etudier $f(x)$

$f'(x) = g(x)/x^3$ et l'on en déduit que f est croissante lorsque $g(x) > 0$, ie lorsque $x < \alpha$

3°. Montrer que $I_n = \dfrac{n+1}{e^n} - \dfrac{n+2}{e^{n+1}}$, montrer que $J_n = I_n + e$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} J_n$

Les formules apparaissent en effectuant une intégration par parties. La première égalité montre que I_n tend vers 0 et la seconde que J_n tend vers e.

XVIII. Exercices de la Banque d'Epreuves

Le corrigé est disponible à mon bureau si vous coincez sur ces exercices (qui sont d'un bon niveau).

1°. Calculer par intégration par parties $\displaystyle\int_1^x (2t-1)\ln\left(\frac{t^2}{t^2+t+1}\right) dt$

2°. Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{dv}{\cos v}$ définie sur $I =]-\pi, \pi[$

Calculer $h(x)$ en effectuant le changement de variables $t = \tan(v/2)$.
Démontrer que $h(x)$ est bijective sur I et donner l'expression de sa réciproque $k(y)$

3°. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^5 + 3x^4 + 1}{x^4 - x^3 + x - 1} dx$

4°. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{20\sin(2t)}{\cos(3t) + 8\cos(2t) + 39\cos t + 48} dt$ en posant $x = \cos t$

5°. Soient $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$ et $g(x) = \dfrac{4 - 2x^3 - x^4 - x^5}{16 - y^8}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$

Applications du calcul intégral

XIX. Moments d'inertie d'un solide

XX. Calculs d'aires et de volumes

XXI. Travail et puissance en électronique