MATHEMATIQUES TD N°5 : CALCUL INTEGRAL.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Intégration directe

1°. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)dx$ 2°. $\int_4^8 \frac{2x}{x^2-4}dx$ 3°. $\int_{-1}^2 \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}dx$ 4°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

5°. $\int_1^2 (1-\frac{1}{x+1})dx$ 6°. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan 2x}{\cos^2(2x)}dx$ 7°. $\int_0^1 (t^2+t)dt$ 8°. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt$

9°. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ 10°. $\int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{1+\ln x}\; dx$ 11°. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ 12°. $\int_{-1}^4 (x^3+3x^2-1)dx$

II. Intégration par parties

1°. $\int_1^e x^2\ln x dx$ 2°. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ 3°. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ 4°. $\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$

5°. $\int_0^1 t^2e^t dt$ 6°. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}dt$ 7°. $\int_0^3 x\sqrt{3-x}\; dx$ 8°. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

III. Fractions rationnelles

1°. $\int_2^3 \frac{3x+1}{x^2-1}dx$ 2°. $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}dx$ 3°. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$ 4°. $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}dx$

5°. $\int_{-1}^0 \frac{t^2-5}{t-1}dt$ 6°. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx$ 7°. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2+3}du$ 8°. $\int_1^2 \frac{2x^4+x^3+3x^2+3x+2}{x^2(x+1)}dx$

9°. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+4}$ 10°. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3-8}du$ 11°. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3-1}$ 12°. $\int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)}dx$

IV. Changement de variables

1°. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$, $u=\frac{1}{x}$ 2°. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $u=\frac{1}{x}$ 3°. $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}dx$, $u=x^4$

4°. $\int_0^1 e^{\sqrt{t}}dt$, $u=\sqrt{t}$ 5°. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan(x^2)dx$, $u=x^2$ 6°. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+3)}dx$, $u=\sqrt{x}$

7°. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5sh(x)-4ch(x)}$, $u=e^x$ 8°. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}dx$, $u=\arctan x$ 9°. $\int_{-7}^{-3} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$, $cht=-\frac{x+1}{2}$

10°. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{1/x}dx$, $u=\frac{1}{x}$ 11°. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$, $u=\sqrt{x+1}$ 12°. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$, $u=\sqrt{x}$

13°. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\ln(1+e^x)dx$, $u=e^x$ 14°. $\int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}dt$, $u=\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$ 15°. $\int_0^2 \frac{2dx}{(x^2+4)^{3/2}}$, $x=2\tan t$

16°. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $u=argshx$ 17°. $\int_0^1 \frac{t\sqrt{t}}{t^2-16}dt$, $t=u^2$ 18°. $\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{u})}{u\sqrt{u}}du$, $t=\sqrt{u}$

V. Intégrales trigonométriques

1°. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos(2t)}dt$, $x=\cos t$ 2°. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$, $u=\cos x$ 3°. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^4 x}$, $x=\arctan t$

4°. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\sin^2 x\; dx$, $u=\sin x$ 5°. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}dx$, $u=\tan x$ 6°. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$, $u=cotanx$

7°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$, $t=\tan\frac{x}{2}$ 8°. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$, $t=\tan\frac{x}{2}$

VI. Intégrales de Fourier

On note $I_k=\int_0^{2\pi} x^k\cos(nx)dx$ et $J_k=\int_0^{2\pi} x^k\sin(nx)dx$, $n,k\in\mathbb{N}$

1°. Exprimer I_{k+1} et J_{k+1} en fonction de I_k et J_k

2°. Calculer I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2
3°. Mêmes questions en remplaçant la valeur 2π de la borne supérieure des intégrales par la valeur π.

Ces intégrales nous serons très utiles lors de la leçon sur les séries de Fourier.
Il serait intéressant de les recopier sur un formulaire.

VII. Calcul par récurrence

On considère $K_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°. Calculer K_0, K_1, K_2
2°. Montrer que $K_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)K_n$
3°. En déduire K_2, K_3 et $K = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} dx$
4°. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\int_0^1 P(x)e^{-x} dx$ en fonction des K_n.

VIII. Intégrales de Wallis

Soient $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \ \forall n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0, I_1, I_2 et J_0, J_1, J_2
2°. Montrer que $I_n = J_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ puis que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ \forall n \geq 2$
3°. En déduire que $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}$, $\forall p \in \mathbb{N}$
4°. Calculer $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin u$
5°. Calculer $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

IX.

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(\cos x) dx$

1°. Calculer I en posant $t = \sin x$
2°. Montrer que $J = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$
3°. En déduire la valeur de J.

X.

1°. Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$

Calculer I, puis $I + J$ et en déduire J

2°. Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

Calculer $I + J$, puis $I - J$. En déduire I et J

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \ dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \ dx$

Calculer $I + J$, puis $I - J$. En déduire I et J

XI.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \ dx$

1°. Calculer I_0 et montrer que $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$
2°. En déduire que $I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

XII.

Soient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\ dx$

Soit $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

1°. Calculer $f'(x)$ et en déduire I.

2°. Montrer que $K = 2I + J$ et $K = \sqrt{3} - J$. En déduire J et K.

XIII.

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\ dx$, $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0 et I_1 et montrer que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$

2°. Calculer I_2

3°. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$

4°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

XIV.

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx\ n > 0$

1°. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]1, e[$, $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$ et montrer que $(I_n)_n$ est décroissante.

2°. Calculer I_1 et montrer que $\forall n > 0$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3°. En déduire I_2, I_3, I_4

4°. Montrer que $I_n \geq 0$ et que $(n+1)I_n \leq e\ \forall n > 0$

5°. Calculer $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

XV.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\ dx$, $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0, I_1 et montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

2°. Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$

4°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

XVI.

Soient $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\ dx$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \sin^4 x\ dx$

1°. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x)\ dx$

2°. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\ dx - \frac{1}{3}I$

3°. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\ dx - \frac{1}{3}J$

4°. Montrer que $I + J = 3\pi/4$ et que $I = J$. En déduire I et J.

5°. Retrouver ces résultats en linéarisant $\sin^4 x$ et $\cos^4 x$

XVII.

Soient $f(x) = \dfrac{\ln x + ex}{x^2}$, $g(x) = -2\ln x - xe + 1$, $I_n = \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right) dt$ et $J_n = \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt\ \forall n \in \mathbb{N}$

1°. Etudier $g(x)$. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α. En déduire le signe de $g(x)$.

2°. Etudier $f(x)$

3°. Montrer que $I_n = \dfrac{n+1}{e^n} - \dfrac{n+2}{e^{n+1}}$, montrer que $J_n = I_n + e$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$

XVIII. Exercices de la Banque d'Epreuves

1°. Calculer par intégration par parties $\displaystyle\int_1^x (2t-1)\ln\left(\frac{t^2}{t^2+t+1}\right)dt$

2°. Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{dv}{\cos v}$ définie sur $I =]-\pi, \pi[$

Calculer $h(x)$ en effectuant le changement de variables $t = \tan(v/2)$.
Démontrer que $h(x)$ est bijective sur I et donner l'expression de sa réciproque $k(y)$

3°. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^5+3x^4+1}{x^4-x^3+x-1}dx$

4°. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{20\sin(2t)}{\cos(3t)+8\cos(2t)+39\cos t+48}dt$ en posant $x = \cos t$

5°. Soient $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$ et $g(x) = \dfrac{4-2x^3-x^4-x^5}{16-y^8}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$

Applications du calcul intégral

XIX. Moments d'inertie d'un solide

XX. Calculs d'aires et de volumes

XXI. Travail et puissance en électronique