MATHEMATIQUES TD N°6 : INTEGRALES GENERALISEES - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Calculer

1°. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$

2°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

3°. $\int_0^1 \ln x\ dx = [x\ln x - x]_0^1 = \lim_{x\to 0^+} x\ln x - 1 = -1$

4°. $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\ dx = -\int_0^1 \ln x\ dx = 1$ C'est le même que ci-dessus !

5°. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\ du}{1+u^2} = \pi$

6°. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$

7°. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = [2\sqrt{x-1}]_1^2 = 2$

8°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = [-\frac{1}{x}]_1^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + 1 = 1$

9°. $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\ dx = [-2\sqrt{1-e^x}]_{-1}^0 = 2\sqrt{1-\frac{1}{e}}$

10°. $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}\ dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\ dx - 2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$

$= [\sqrt{x^2-1}]_1^2 - 2[argch(x)]_1^2 = \sqrt{3} - 2argch(2)$

$= \sqrt{3} - 2\ln(2+\sqrt{3})$

11°. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\ dx = -\frac{1}{x-1}\rfloor_2^{+\infty} = 1$

12°. $\int_0^{+\infty} \frac{x^7}{1+x^{16}}\ dx$ de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$

$= \frac{1}{8}\arctan(x^8)\rfloor 0^{+\infty} = \frac{\pi}{16}$

13°. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx = -2e^{-\sqrt{x}}\rfloor_0^{\infty} = 2$

14°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} = \left(-\frac{1}{x} + \ln(\frac{x+1}{x})\right)_1^{\infty} = 1 - \ln 2$

15°. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ch\ x}$ On pose $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{2\ du}{u(u+1/u)} = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$

16°. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

Bon, celle là est nettement plus dure, vous pouvez la laisser de côté dans un premier temps : On a $1+x^3 = (1-x)(1+x^2-x)$ donc

$\frac{1}{1+x^3} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+\gamma} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{1-x+x^2}\right)$

$\frac{2-x}{1-x+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{2x-1-3}{1-x+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-x+x^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$I = \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right]_0^{\infty}$

$I = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\rfloor_0^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

17°. $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\ dx$ On effectue une $\int$ par parties

$= \left[-\frac{1}{1+x}\ln x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)} = \left(\ln x(1 - \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)\right)_0^1$
$= -\ln 2$

18°. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \left(\frac{1}{x}\ln x\right)_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = (-\frac{1}{x})_1^{\infty} = 1$

19°. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\rfloor_0^{\infty} = \frac{1}{2}$

20°. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

en décomposant en éléments simples (question difficile).

II. Calculer par changement de variables

1°. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad u = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

$= \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\rfloor_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

2°. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} \quad u = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2udu$

$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2u\ du}{u(u^2+1)} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{du}{u^2+1} = 2\arctan u\rfloor_0^{\sqrt{2}} = 2\arctan\sqrt{2}$

3°. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx \quad \sin u = \frac{x}{4} \Rightarrow dx = 4\cos u\ du$

$\sqrt{16-x^2} = 4\cos u \Rightarrow I = \int_0^4 du = 4$

4°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad x = \tan u \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{1+\tan^2 u} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 u\ du = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2u)\ du$

$= \left[\frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\sin 2u)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi-2}{8}$

5°. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}} \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2udu$

$= \int_0^{\infty} \frac{2udu}{u(1+u^4)} = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

obtenu en décomposant en éléments simples, puis en intégrant terme à terme (on fait apparaître des ln et des arctan) ; on a :

$\int \frac{2du}{1+u^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left[\frac{u^2+u\sqrt{2}+1}{u^2-u\sqrt{2}+1}\right] + ...$

$... + \frac{\sqrt{2}}{2}(\arctan(u\sqrt{2}+1) + \arctan(u\sqrt{2}-1))$

6°. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} \quad t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+2t/(1+t^2)}\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = -(\frac{2}{1+t})_0^{\infty} = 2$

7°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)^3}} = I \quad x = 1 + sh(u)$

$dx = ch(u)\ du$ et
$x^2 - 2x + 2 = (sh(u)+1)^2 - 2sh(u) - 2 + 2$
$= sh^2(u) + 1 = ch^2(u)$
$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(u)}{ch^3(u)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{ch^2(u)}$
on pose $x = e^u \Rightarrow I = 4\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x^2+1}\rfloor_0^{\infty} = 2$

8°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^4)^2}\ dx \quad u = x^2 \Rightarrow du = 2x\ dx$
$= \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{8}$ (calculée précédemment)

9°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2u\ du$
$= \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2du}{1+u^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (déjà calculée également)

III. Nature des intégrales

Nous noterons souvent $f(x)$ la fonction à intégrer et I l'intégrale.

1°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

$f(x) \sim \dfrac{1}{x^3}$ en l' ∞ et la fonction est positive ; d'après le critère d'équivalence, I converge.

2°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt{x(1+2x)}}\ dx$

$f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et la fonction est positive ; I converge.

3°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\ dx$

$f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et la fonction est positive ; I converge en 0 mais pas en l'infini : l'intégrale n'existe pas.

4°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\ dx$

$f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$ en ∞ et la fonction est positive ; I converge.

5°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-x^2}$

$\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} \sim \dfrac{1/2}{1-x}$; l'intégrale est de la forme $\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha}}$ avec $\alpha = 1$, elle diverge donc.

6°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\ln x}$

La fonction est négative sur $]0,1[$; elle est donc de signe constant et l'on peut utiliser les critères. $\ln x < x \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable sur un voisinage de 0 de la forme $]0,u]$: I diverge.
Nous regardons également la convergence en 1 bien que cela ne soi pas nécessaire (I diverge si l'intégrale est divergente à l'une des deux bornes, ce qui est le cas ici). On peut poser $u = 1-x$ et $I = \int_1^0 \frac{-du}{\ln(1-u)}$ $\ln(1-u) \sim -u$ en 0 donc l'intégrale diverge aussi en 1

7°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1)\ dx$

$f(x) > 0$ et $f(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale diverge.

8°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\frac{\sin x}{1-\cos x}\ dx$

$f(x) \sim \sqrt{x}\dfrac{x}{x^2/2} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable en 0. I converge.
Par ailleurs la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration.

9°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}\ dx$

De la même façon que ci-dessus $f(x) \sim \dfrac{2}{x}$ et I diverge.

10°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\ dx$

$|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable. D'après le critère de majoration, l'intégrale converge.

11°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$

Cette intégrale est généralisée en 0 en $+\infty$
• en 0 :
$f(x) \sim 1$ et l'intégrale converge donc car la fonction constante égale à 1 est intégrable au voisinage de 0
• en l'infini :
On utilise le critère d'Abel : $|\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sin x\ dx| \leq 2$ et
$1/x > 0, \downarrow \rightarrow 0$ I est donc convergente aux deux bornes, par conséquent elle converge.

12°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\ dx$

On applique le critère d'Abel de la même façon que ci-dessus : I converge.

13°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\ dx$

La fonction à intégrer n'a pas de limite en $+\infty$ et pourtant nous allons voir que cette intégrale converge : l'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement ; on effectue le changement $u = x^2$
$= \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du$
Cette nouvelle intégrale est convergente en $+\infty$ d'après le critère d'Abel. L'intégrale initiale converge donc aussi.

14°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\ dx$

De la même façon que ci-dessus on effectue un changement en $u = x^2$; on obtient :
$I = \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}} du$ qui converge d'après le critère d'Abel.

15°. $\displaystyle\int_0^{1} \sin\frac{1}{x}\ dx$

Posons $u = 1/x$ Alors $I = -\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ qui converge d'après le critère d'Abel.

16°. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}\ dx$

$|f(x)| \leq \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ qui est une intégrale de Bertrand intégrable en $+\infty$.

On rappelle que les intégrales de Bertrand sont de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ et convergent si $\alpha > 1$ ou $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 2$

17°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{e^x - \cos x}\, dx$

La fonction à intégrer est positive. Il faut utiliser un développement limité : $e^x - \cos x = x + o(x)$ et $\ln(1+x) = x + o(x)$. La fonction à intégrer est donc équivalente à 1 en $x = 0$: l'intégrale converge.

18°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

$e^x - \cos x \sim x$ et la fonction $1/x$ n'est pas intégrable au voisinage de 0. L'intégrale n'existe pas.

19°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

La fonction est positive et $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ en l'infini. I est donc convergente d'après le critère d'équivalence.

20°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})}\, dx$

L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$

• en 0 :

Les fonctions en jeu sont positives sur $]0, u]$ avec $u > 0$ et $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin\dfrac{1}{x^2}$. Par ailleurs, $|\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin\dfrac{1}{x^2}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable au voisinage de 0. D'après les critères d'équivalence et de majoration, l'intégrale converge.

• en ∞ :

$\sin(1/x^2) \sim 1/x^2$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \geq 1$ pour x assez grand. Comme $1/x^2$ est intégrable en $+\infty$, alors $f(x)$ est intégrable.

21°. $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x \ln x}{x}}\, dx$

Cette intégrale est généralisée en 0 et

$\bullet = (\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\sin x \ln x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Par suite, $f(x) = e^{\bullet} \geq 1$ dont la primitive tend vers l'infini quand x tend vers 0. Par suite, l'intégrale diverge.

22°. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln\ln x}$

L'intégrale est généralisée en $+\infty$ et $f(x) \geq \dfrac{1}{x\ln x}$ dont l'intégrale diverge. Ces fonctions sont positives pour x assez grand, ce qui justifie l'utilisation des critères.

23°. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(1-x^3)^{2/3}}$

L'intégrale est généralisée en 1.

$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$; ainsi, $f(x) \sim \dfrac{1}{3^{2/3}(1-x)^{2/3}}$ au voisinage de 1 et cette fonction est intégrable car $2/3 < 1$. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale converge.

24°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\, dx$

La fonction est positive et l'intégrale est généralisée en 0. $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable.

25°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^{6/5}\, dx$

L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$. $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^{6/5}}$ qui est intégrable en $+\infty$. De la même façon en 0, $f(x) \sim 1$ qui est intégrable. I converge.

26°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3}\, dx$

$f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$ en $+\infty$ et I converge donc.

27°. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2} = 2$

et bien sûr I converge !

28°. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$ qui est intégrable au voisinage de 1 car de la forme $\frac{1}{(x-1)^\alpha}$ avec $\alpha < 1$. Donc I converge.

IV. La fonction Gamma d'Euler

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1°. Démontrer que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

L'intégrale définissant Γ est généralisée à la fois en 0 et en $+\infty$

• en 0 :

au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable si et seulement si $1 - x < 1$ ie $x > 0$

• en ∞ :

$\forall\alpha, \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$ (croissance comparée entre exponentielle et puissance) $\Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$

Ainsi, $\exists t_0/\ \forall t > t_0, t^2t^{x-1}e^{-t} < 1$ donc

$\exists t_0/\ \forall t > t_0, t^{x-1}e^{-t} < 1/t^2$ Comme $1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, il en est de même pour la fonction initiale d'après le théorème de majoration.

2°. Démontrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ \forall x > 0$ déduire $\Gamma(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On effectue une intégration par parties :

$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt$

$= \displaystyle\lim_{t\to 0} t^x e^{-t} - \lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 = 0!$

Supposons que $\Gamma(n) = (n+1)!$

Alors $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n\Gamma(n) = n!$

3°. En supposant que Γ est continue sur $]0, +\infty[$ donner un équivalent de $\Gamma(x)$ en 0.

En utilisant la propriété précédente,

$\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(1)}{x}$ par continuité de Γ. Ainsi, $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en 0

4°. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$

$\forall x > 1,\ \Gamma(x) > 1$ (car $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\Gamma(x) > \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

V.

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\ dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\ dx$,
$K = \int_0^{\pi} \ln\sin x\ dx$ et $L = \int_0^{+\infty} (\frac{\arctan x}{x})^2\ dx$

1°. Montrer que I, J, K et L sont convergentes.

• I est généralisée en 0. $\ln\sin x \sim \ln x$ en 0 car $\lim_{x\to0}\sin x \neq 1$.
Donc, comme x est intégrable en 0 et que $\ln x$ et $\ln\sin x$ sont < 0 sur un voisinage $]0,u]$ de 0 alors (critère d'équivalence), I est intégrable en 0.
• Le changement de variables $u = \pi/2 - x$ montre que $I = J$ donc J est également convergente.
• K est convergente en 0 pour la même raison que I. Elle est aussi généralisée en π, mais le changement de variable $x = \pi - u$ permute les bornes, de sorte que le comportement de K en π est le même qu'en 0, ie l'intégrale est convergente.
• L est généralisée en 0 et en l'infini. En 0, $\arctan x \sim x$ donc $(\arctan x/x)^2 \sim 1$ qui est intégrable (fonction >0) ; en l'infini, $(\arctan x/x)^2 \leq \frac{\pi}{2x^2}$ qui est intégrable. D'après le critère de majoration, L est donc convergente.

2°. Montrer que $I = J = \frac{K}{2}$, puis que $I + J = \frac{K}{2} - \frac{\pi}{2}\ln 2$

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\ dx = \int_{\pi/2}^{0} \ln\sin u(-du) = I \Rightarrow I = J$$
$$K = \int_0^{\pi} \ln\sin x\ dx = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin x\ dx$$
$= I + \int_0^{\pi/2} \ln\sin(u+\pi/2)du$ avec $u = x - \pi/2$ dans la 2nde $\int$.
$\Rightarrow K = I + J$
Par ailleurs, $I = J \Rightarrow I = J = \frac{K}{2}$
$$I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \times \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$$
$$= -\int_0^{\pi/2} \ln 2\ dx + \int_0^{\pi} 2\ln\sin(2x)dx =$$
$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin x\ dx$$
$$I + J = \frac{K}{2} - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

3°. En déduire K, I et J.

Les questions précédentes donnent un système de 3 équations à 3 inconnues. On obtient facilement :
$K = -\pi\ln 2$ et $I = K = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

4°. Calculer $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u^2}{\sin^2 u}\ du$.

Effectuons une double intégration par parties :
$$M = [-2u\text{cotan } u]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} u \times \text{cotan } u\ du$$
$$M = 2u\ln\sin u\rfloor_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin u\ du = -2I = \pi\ln 2$$

5°. En déduire L en posant $u = \arctan x$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{u}{\tan u}\right)^2 \frac{du}{\cos^2 u}$$
$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{u^2}{\sin^2 u}du = M = \pi\ln 2$$

VI.

$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2}dx$ et $J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

1°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\rfloor_1^\infty = \frac{\pi}{4}$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^{\infty} (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx = \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\rfloor_1^\infty = \frac{1}{2}\ln 2$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{2u\ du}{u(u^2+1)} = \frac{\pi}{2}$$
On en déduit que $I_2 = \pi/4$ et $I_3 = \frac{1}{2}\ln 2$

2°. Pour quelles valeurs de α l'intégrale I_α est-elle convergente ?

La fonction est ≥ 0 et on peut donc appliquer les critères de convergence. $\frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ qui converge ssi $\alpha > 1$ en $+\infty$

3°. $J_\alpha = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\ln(1+x^2)\right]_1^\infty - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^\infty \frac{x^{1-\alpha}2x}{1+x^2}dx$
$$J_\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha-1}} + \frac{\ln 2}{\alpha-1} + \frac{2I_\alpha}{\alpha-1}$$
$$J_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}(2I_\alpha + \ln 2)$$

4°. En déduire J_2 et J_3.

$J_2 = \frac{2I_2 + \ln 2}{1} = \frac{\pi}{2} + \ln 2$ et $J_3 = \frac{1}{2}(2I_3 + \ln 2) = \ln 2$

VII.

Soit $I_n = \int_0^{\pi} cotan\frac{x}{2}\sin nx\ dx$ pour $n \in \mathbb{N}$
Soit f la fonction 2π-périodique paire définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \ln(2\sin\frac{x}{2})$

ATTENTION : Cet exercice utilise les séries de Fourier !!

1°. Faire l'étude complète de f

$f\exists$ ssi $\sin(x/2) > 0 \iff x \in]0, 2\pi[$
$\ln(2\sin(x/2))$ est 4π-périodique définie sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ donc f est 2π-périodique (par définition) et définie sur $\mathbb{R}/\ \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
Etudions f sur $]0, 2\pi[$: $f'(x) = \frac{1}{2}cotan\frac{x}{2} \geq 0$ si $x \in]0, \pi[$
$f(x) \geq 0 \iff 2\sin(x/2) \geq 1 \iff x \in [\pi/3; 5\pi/3]$ et $f(\pi) = \ln 2$ est un maximum.

2°. $\int_0^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})\ dx = \pi\ln 2 + \int_0^{\pi} \ln\sin\frac{x}{2}dx$ posons
$u = x/2 = \pi\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)(2du) = \pi\ln 2 - \pi\ln 2 = 0$
(cf. exo 5).

3°.
$$cotan\frac{x}{2}[\sin((n+1)x) - \sin(nx)] = \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}[2\cos(\frac{2n+1}{2}x)\sin(\frac{x}{2})]$$
$$= 2\cos(\frac{2n+1}{2}x)\cos\frac{x}{2} = \cos(\frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2}x) + \cos(\frac{x}{2} - \frac{2n+1}{2}x)$$
$$= \cos((n+1)x) + \cos(nx)$$

4°. En déduire que $I_n = \pi\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \cos((n+1)x)dx + \int_0^{\pi} \cos(nx)dx$$
$$= \frac{\sin((n+1)x)}{n+1} - \frac{\sin(nx)}{n}\rfloor_0^\pi = 0$$
Ainsi, $\forall n,\ I_n = I_{n+1} = I_1 = \pi$

En effet, $I_1 = 2\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx = (x+\sin x)_0^{\pi} = \pi$

5°. En effectuant une intégration par parties, en déduire les coefficients de Fourier de f

f est paire donc $b_n = 0$. Par ailleurs,
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})dx = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})\cos(nx)dx = 0 - \frac{2}{2n\pi}I_n = -\frac{1}{n}$
Ainsi, $S(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n}$

6°. f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
Pour une fois la réponse est non car $f(x)$ tend vers l'infini en $2k\pi$ et n'a donc pas de demi-dérivée en ce point. Par contre, f est de classe C^{∞} sur $]0, 2\pi[$ où l'on peut appliquer le théorème.

8°. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ En $x = \pi$, f est continue et $f(\pi) = S(\pi)$ donc $\ln 2 = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

VIII.

Soient $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\sqrt{x}}dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = (-e^{-t})_0^{+\infty} = 1$
$I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = (-te^{-t})_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$
$I_2 = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = (-t^2e^{-t})_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} te^{-t}dt = 2$

2°. $I_n = n!$ par récurrence.

3°. $J_n = 2\int_0^{\infty} t^{2n+1}e^{-t}dt = 2I_{2n+1}$
Ainsi, $J_0 = 2I_1 = 2$, $J_1 = 2I_3 = 12$ et $J_2 = 2I_5 = 240$

IX. Concours 2003

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

1°. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$
En effectuant une intégration par parties,
$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = 2nI_n - 2nI_{n+1}$
D'où $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n$

2°. $I_2 = I_1/2 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = 3I_2/4 = \frac{3\pi}{16}$
Enfin, par récurrence, on démontre que
$I_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2}\frac{\pi}{2}$ pour $n \geq 1$

X.

Soient $f(t) = \frac{t\ln t}{1-t}$, $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt$, $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \frac{t\ln t}{1-t}dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. $\lim_{x\to 0^+} f(t) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} f(t) = -1$

2°. f est continue sur $]0, 1[$ et $f'(t) = \frac{1-t+\ln t}{(1-t)^2} < 0$ et f est donc décroissante de 0 à -1 sur $]0, 1[$; on en déduit qu'elle est bornée, donc qu'il existe
$M > 0/\ 0 \leq f(x) \leq M\ \forall\ x \in [0, 1]$

3°. $0 \leq f(t) \leq M \Rightarrow 0 \leq J_n \leq M\int_0^1 t^n\ dt \leq \frac{M}{n+1}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

4°. $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ est vraie si $n = 1$ et se démontre dans le cas général par une récurrence facile.
$\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\ln t dt = I + J_n$ par linéarité de l'intégrale et en utilisant la formule de la somme des n premiers termes d'une série géométrique.

De même, $I = \sum_{k=0}^{n} I_k - J_n$

5°. $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ d'après la leçon sur les séries de Fourier.

XI. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

Soit $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

1°. Montrer que I est convergente.

L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$. Au voisinage de 0, $\frac{\sin t}{t} \geq 0$ et $\frac{\sin t}{t} \sim 1$ qui est intégrable. En l'infini, le critère d'Abel s'applique et l'intégrale converge également.

2°. Montrer que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ par définition d'une primitive et
$f'(x) \geq 0 \iff x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$. f est par ailleurs impaire car $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}dt = -\int_0^{x} \frac{\sin u}{u}du = -f(x)$

3°.
$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\left[\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)\right]dt$
$= 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)t)dt = 0$ car
$\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t) = 2\sin t.\cos((2n+2)t)$
Ainsi, $J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}\ \forall n$

6°. La fonction $g(t) = \frac{t-\sin t}{t\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et tend vers 0 quand x tend vers 0 (d'après la rêgle de l'Hopital, par exemple). On peut donc prolonger g par continuité en 0. Le lemme de Riemann-Lebesqgue donne alors le résultat : $\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$ et comme $J_n = \pi/2$, $\lim_{n\to+\infty} K_n = \pi/2$

7°. Posons $u = (2n+1)t$ dans K_n : $\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}du$ et donc
$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}du = \lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$

XII.

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 t}{n^2\sin^2(t/n)}dt$,
$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx$ et $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx$

Soient également $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ et
$g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ une fonction définie sur $]0, \pi/2]$.

1°. Montrer que I est convergente.

2°. Montrer que g est bornée sur $]0, \pi/2]$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = I$

3°. Montrer que J_n et K_n sont convergentes pour tout $n \geq 1$

4°. Calculer $K_{n+1} - K_n$ et vérifier que $J_{n+1} - J_n = K_{n+1}$ $\forall n \geq 1$. En déduire K_n et J_n

5°. Trouver une relation entre I_n et J_n. En déduire la valeur de I

6°. En intégrant par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

XIII.

Soit $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x) dx$

1°. Montrer que $f(x) \geq 0$ et que $I(\alpha) \geq 0$

2°. Déterminer a et b tels que $\dfrac{e^x}{1 + e^x} = a + \dfrac{b}{1 + e^x}$; en déduire $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{dx}{1 + e^x}$

3°. Calculer $f + f'$; en déduire $I(\alpha)$

4°. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$ et $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} J(\alpha)$