R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Calculer

1°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ 2°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 3°. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,dx$ 4°. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{1}{x}\,dx$

5°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 6°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 7°. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 8°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

9°. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$ 10°. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ 11°. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ 12°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^7}{1+x^{16}}\,dx$

13°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 14°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 15°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ch\ x}$ 16°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

17°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$ 18°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ 19°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ 20°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

II. Calculer par changement de variables

1°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad u=e^x$ 2°. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} \quad u=\sqrt{x+1}$ 3°. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx \quad \sin u=\frac{x}{4}$

4°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad x=\tan u$ 5°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}} \quad u=\sqrt{x}$ 6°. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} \quad t=\tan\frac{x}{2}$

7°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+2)^3}} \quad x=1+sh(u)$ 8°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^4)^2}\,dx \quad u=x^2$ 9°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \quad u=\sqrt{x}$

III. Nature des intégrales

1°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ 2°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt{x(1+2x)}}\,dx$ 3°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ 4°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

5°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-x^2}$ 6°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\ln x}$ 7°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{\frac{1}{x}}-1)\,dx$ 8°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$

9°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$ 10°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ 11°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 12°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$

13°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ 14°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\,dx$ 15°. $\displaystyle\int_0^{1} \sin\frac{1}{x}\,dx$ 16°. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}\,dx$

17°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{e^x-\cos x}\,dx$ 18°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$ 19°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ 20°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})}\,dx$

21°. $\displaystyle\int_0^{1} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x\ln x}{x}}\,dx$ 22°. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$ 23°. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x(1-x^3)^{2/3}}$ 24°. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,dx$

25°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^{6/5}\,dx$ 26°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$ 27°. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ 28°. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

IV. La fonction Gamma d'Euler

On pose $\displaystyle\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1°. Démontrer que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x>0$.
2°. Démontrer que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\ \forall x>0$ et en déduire $\Gamma(n)\ \forall n\in\mathbb{N}$.
3°. En supposant que Γ est continue sur $]0,+\infty[$ donner un équivalent de $\Gamma(x)$ en 0.
4°. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)$

V.

Soient $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$, $\displaystyle J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$, $\displaystyle K=\int_0^{\pi}\ln\sin x\,dx$ et $\displaystyle L=\int_0^{+\infty}(\frac{\arctan x}{x})^2\,dx$

1°. Montrer que I, J, K et L sont convergentes.
2°. Montrer que $I=J=\dfrac{K}{2}$, puis que $I+J=\dfrac{K}{2}-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$
3°. En déduire K, I et J.

4°. Calculer $M = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u^2}{\sin^2 u}\, du.$
5°. En déduire L en posant $u = \arctan x$

VI.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2} dx$ et $J_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$

1°. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ et en déduire I_2 et I_3.
2°. Pour quelles valeurs de α l'intégrale I_α est-elle convergente ?
3°. En effectuant une intégration par parties, montrer que $J_\alpha = \dfrac{2I_\alpha + \ln 2}{\alpha - 1}$
4°. En déduire J_2 et J_3.

VII.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} cotan\frac{x}{2} \sin nx\; dx$ pour $n \in \mathbb{N}$
Soit f la fonction 2π-périodique paire définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \ln(2 \sin \dfrac{x}{2})$

1°. Faire l'étude complète de f
2°. En utilisant l'exercice du CR 99/00, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})\; dx = 0$
3°. Montrer que $cotan(\dfrac{x}{2}) \times [\sin((n+1)x) - \sin(nx)] = \cos(nx) + \cos((n+1)x)$
4°. En déduire que $I_n = \pi\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
5°. En effectuant une intégration par parties, en déduire les coefficients de Fourier de f
6°. f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
8°. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

VIII.

Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\sqrt{x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_0, I_1, I_2 et exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
2°. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3°. Exprimer J_n en fonction de I_n et en déduire la valeur de J_0, J_1, J_2

IX.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer I_1 et déterminer I_{n+1} en fonction de I_n
2°. En déduire I_2 et I_3 puis démontrer que $I_n = \dfrac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} \dfrac{\pi}{2}$ pour $n \geq 1$

X.

Soient $f(t) = \dfrac{t \ln t}{1-t}$, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \frac{t \ln t}{1-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(t)$ $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(t)$
2°. Montrer que f est bornée sur $[0, 1]$ et qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1],\ 0 \leq f(x) \leq M$
3°. Montrer que $J_n \leq \dfrac{M}{n+1}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n$
4°. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \ln t dt = I + J_n$, puis que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k - J_n$
5°.En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

XI. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

1°. Montrer que I est convergente.

2°. Montrer que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$

3°. Déterminer les variations de f

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$

4°. Calculer $J_{n+1} - J_n$ et en déduire J_n $\forall n$

5°. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$ en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction $g(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$

6°. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n$

7°. Montrer que $I = \dfrac{\pi}{2}$ et étudier la fonction f

XII.

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 t}{n^2 \sin^2(t/n)} dt$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x} dx$

Soient également $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ une fonction définie sur $]0, \pi/2]$.

1°. Montrer que I est convergente.

2°. Montrer que g est bornée sur $]0, \pi/2]$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = I$

3°. Montrer que J_n et K_n sont convergentes pour tout $n \geq 1$

4°. Calculer $K_{n+1} - K_n$ et vérifier que $J_{n+1} - J_n = K_{n+1}$ $\forall n \geq 1$. En déduire K_n et J_n

5°. Trouver une relation entre I_n et J_n. En déduire la valeur de I

6°. En intégrant par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

XIII.

Soit $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x) dx$

1°. Montrer que $f(x) \geq 0$ et que $I(\alpha) \geq 0$

2°. Déterminer a et b tels que $\dfrac{e^x}{1+e^x} = a + \dfrac{b}{1+e^x}$; en déduire $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+e^x}$

3°. Calculer $f + f'$; en déduire $I(\alpha)$

4°. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} J(\alpha)$