MATHEMATIQUES TD N°10 : SERIES DE FOURIER - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

Calculs de séries de Fourier

I.

1°. $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$

$S(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

2°. On applique le théorème de Dirichlet en $x = \pi/2$ (car f est C^1 par morceaux) auquel cas

$\sin((2n+1)\dfrac{\pi}{2}) = (-1)^n \Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

II.

1°. $b_n = 0\ \forall n.$ $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \dfrac{\pi^2}{3}$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)dx = 4\dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$S(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx)$

2°. On applique Dirichlet en $x = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$

On applique ensuite Dirichlet en $x = \pi \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est positive et convergente, en séparant termes pairs et impairs, on en déduit

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n)^2} + \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

On applique ensuite le théorème de Parseval

$||f||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\ dx = \dfrac{\pi^4}{5}$

$||f||^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2 = \dfrac{\pi^4}{9} + \dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^4}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{1}{8}(\dfrac{\pi^4}{5} - \dfrac{\pi^4}{9}) = \dfrac{\pi^4}{90}$

De même que précédemment, en séparant termes pairs et termes impairs, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$

3°. f est impaire donc $a_n = 0$ et en intégrant la série précédente, on trouve

$S(x) = -2\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}(\pi^2 - \dfrac{6}{n^2})\sin(nx)$

III.

1°. $b_n = 0$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $a_n = \dfrac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$

$S(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

2°. On applique Dirichlet en $x = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ en séparant termes pairs et impairs.

IV.

1°. $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\alpha x}e^{-inx}dx = \dfrac{1}{\alpha - in}(e^{(\alpha - in)x})_0^{2\pi}$

$S(x) = \dfrac{e^{2\pi\alpha} - 1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{e^{inx}}{\alpha - in}$

2°. Pour tout $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, le théorème de Dirichlet donne $e^{\alpha x} = \bullet\left[\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{inx}}{\alpha - in} + \sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-inx}}{\alpha + in}\right]$ avec

$\bullet = \dfrac{e^{2\pi\alpha} - 1}{2\pi}$

$= \bullet\left[\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{\alpha^2 + n^2}(\alpha\cos(nx) - n\sin(nx))\right]$ Notons

$P(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 + n^2}$ et $I(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{n\sin(nx)}{\alpha^2 + n^2}$ on a

$P(x) + I(x) = \dfrac{1}{\bullet}e^{\alpha x} - \dfrac{1}{\alpha}$ et

$P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x) = \dfrac{1}{\bullet}e^{\alpha x} - \dfrac{1}{\alpha}$ on en déduit que

$P(x) = \dfrac{2\pi ch(\alpha x)}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \dfrac{1}{\alpha}$ et $I(x) = \dfrac{2\pi sh(\alpha x)}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \dfrac{1}{\alpha}$

$P(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\alpha^2 + n^2} = \dfrac{2\pi}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \dfrac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \neq in$

V.

1°. $f(x) = x - \pi$ et f est impaire donc $a_n = 0$;

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\dfrac{2}{n} \Rightarrow S(x) = -2\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(nx)}{n}$

2°. Il s'agit d'une série alternée convergente car $\frac{1}{2n+1} \downarrow\to 0$ quand $n \to +\infty$. D'après le critère spécial des séries alternées, elle converge.

3°. $f(x)$ est C^1 par morceaux et 2π-périodique : on peut appliquer le théorème en $x = \pi/2$ où f est continue et vaut $f(\pi/2) = -\pi/2$ et

$f(\dfrac{\pi}{2}) = -2\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(n\pi/2)}{n} = -\pi/2$

par suite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

VI.

1°. $I_n = \left[\dfrac{1}{n}(\pi^2 - n^2)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\ dx$ ie

$I_n = \dfrac{2}{n}J_n$

$J_n = (-\dfrac{1}{n}x\cos nx)_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ dx = 2\pi\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et

$I_n = \dfrac{4\pi}{n^2}(-1)^{n+1}$ pour $n \geq 1$

2°. Oui, elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sauf en $x \in \mathbb{Z}$ et en $x = k\pi$, la demi-dérivée à gauche et droite vaut $\pm 2\pi$

On a $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$ et $a_n = \dfrac{I_n}{\pi}$ et $b_n = 0\ \forall n.$ donc

$$S(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

3°. En $x = 0$, $S(0) = \pi^2 = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$ et en $x = \pi$, $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

4°. $||f||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)^2\,dx = \dfrac{8\pi^4}{15}$

$a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum |a_n|^2 = \dfrac{4\pi^4}{9} + \dfrac{1}{2}\sum\dfrac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$

VII.

1°. u_k est à termes positifs et $u_k \sim \frac{1}{4k^2}$ d'après le critère d'équivalence, donc $\sum u_n$ converge.

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}) = \dfrac{1}{4k^2-1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{3} - ... - \dfrac{1}{2n+1}\right]$

$= \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2n+1})$, ainsi $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$ $\forall n \geq 1$

$\sum_{k\geq 1} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$

2°. $f(x) = |\sin\dfrac{x}{2}|$ $f(-x) = f(x)$ donc f est paire. et $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc f est 2π-périodique...

3°. f est paire, donc $b_n = 0$, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\frac{x}{2}|\,dx = \frac{2}{\pi}$
et $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\dfrac{x}{2}|\cos nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin\dfrac{x}{2}\cos nx\,dx$
$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(\dfrac{x}{2} + nx)dx + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(\dfrac{x}{2} - nx)dx$
$= \dfrac{-1}{\pi(n+1/2)}\cos(x/2 + nx)_0^{\pi} + \dfrac{1}{\pi(n-1/2)}\cos(x/2 - nx)_0^{\pi}$
$= -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{4n^2-1}$ et $S(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos nx}{4n^2-1}$

4°. Oui, car f est C^1 par morceaux sauf en $x = 2k\pi$ où elle est continue et admet des 1/2 dérivées à droite et à gauche.

5°. En $x = 0$, $S(0) = f(0) \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$, en $x = \pi$,

$S(\pi) = f(\pi)$, $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ qui est une série alternée convergente.

6°. $||f||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\dfrac{x}{2}dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1 - \cos x)dx$
$= \dfrac{1}{2\pi}(x - \sin x)_0^{\pi} = \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{2} = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum a_n^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2} = \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$

VIII.

$f(x) = x(\pi - x)$

1°. $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n^2}$ après calculs et ré-indexation.

2°. f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, en $k\pi$, elle admet une 1/2 dérivée à droite et à gauche.

3°. $1/n^2$ est le terme général d'une série convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est une série alternée pour laquelle le critère s'applique.

En $x = 0$, $S(0) = 0 = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$; de même, en

$x = \pi/2$, $S(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et par ailleurs, $\cos\dfrac{n\pi}{2} = (-1)^n$, on a $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos nx}{n^2} = \sum_{k\geq 1}\dfrac{\cos(k\pi)}{4k^2} \Rightarrow \sum\dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$

4°. $||f||^2 = \dfrac{\pi^4}{30} = \dfrac{\pi^4}{36} + \dfrac{1}{2}\sum\dfrac{1}{n^4}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$

5°. $f'(x) = \pm\pi - 2x$ et f' n'est pas définie en $k\pi$ car f n'y est pas dérivable. f' est par contre C^1 par morceaux et est 2π-périodique : elle est développable en série de Fourier. On effectue une intégration par parties :
$a_n(f') = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\,dx = \left[\dfrac{1}{\pi}f(x)\cos nx\right]_0^{2\pi} + ...$
$... + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx = nb_n(f)$
et de la même façon, $b_n(f') = -na_n(f)$

8°. $T(x) = 2\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin nx}{n}$

IX.

2°. f n'est ni paire ni impaire, $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \dfrac{1}{\pi}$
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = -\dfrac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2-1)}$, $b_1 = 1/2$,
$a_1 = 0$ et $b_n = 0$ si $n > 1$

3°. $S(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$

4°. Oui, car elle est continue et a une demi-dérivée à droite et à gauche en tout point.

5°. On applique Dirichlet en $x = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$

6°. De la même façon, $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

X.

2°. Oui, car f est C^0 et admet une demi-dérivée à droite et gauche en tout point.

3°. f est paire donc $b_n = 0$. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}(\pi - \dfrac{\pi^2}{2}) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$
$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1 - x)\cos nx\,dx = -2\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$
$S(x) = (1 - \dfrac{\pi}{2}) + \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$

4°. En appliquant le théorème de Dirichlet en $x = 0$,
$S(0) = f(0) \Rightarrow \sum\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

5°.
$||f||^2 = \dfrac{1}{3\pi}(\pi - 1)^3 - \dfrac{1}{3}\pi = \dfrac{(2-\pi)^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{4}{(2k+1)^4\pi^2}$
$\Rightarrow \sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^4}{96}$

XI.
Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x)=\cos(ax)$, $a\in\mathbb{R}$.

1°. f est paire donc $b_n=0$ et $a_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)dx$

De $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ on a

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((a+n)x)+\cos((a-n)x))\,dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n}+\frac{\sin((a-n)\pi)}{a-n}\right]$

$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{a+n}\sin(a\pi)+\frac{(-1)^n}{a-n}\sin(a\pi)\right]$

$=\frac{(-1)^n}{\pi}\sin(a\pi)\frac{2a}{a^2-n^2}$

Par ailleurs, $a_0=\sin(a\pi)/(a\pi)$

$S(x)=\frac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sin(a\pi)\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)$

2°. En $x=0$, le théorème donne $f(0)=S(0)$, ie
$1=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sin(a\pi)\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$

3°. En posant $a=\frac{u}{\pi}$ dans l'équation ci-dessus, il vient
$\forall u\in\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},\ \frac{u}{\sin u}=1+2u^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{u^2-n^2\pi^2}$

XII.
2°. Oui, car f est de classe C^1 par morceaux.
3°. f est paire donc $b_n=0\ \forall n$ et
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}ch\ x\cos nx\ dx$

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\ dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}(I_n+J_n)$

Calculons I_n et J_n en effectuant une intégration par parties :

$I_n=\frac{(-1)^ne^{\pi}-1}{1+n^2}$ et $J_n=\frac{(-1)^ne^{-\pi}+1}{1+n^2}$

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[(-1)^ne^{\pi}-1-(-1)^ne^{-\pi}+1\right]$

$\Rightarrow a_n=\frac{2sh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$; de la même façon,

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ch\ x\ dx=\frac{1}{\pi}sh\ x]_0^{\pi}=\frac{sh\pi}{\pi}$ d'où :

$S(x)=\frac{sh\pi}{\pi}+\frac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx$

4°. $S(0)=f(0)=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}=\frac{\pi}{2sh\pi}-\frac{1}{2}$

5°.
$||f||^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ch^2x\ dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(ch\ 2x+1)\ dx=\frac{sh2\pi}{2\pi}+1$
Le théorème de Parseval donne alors la conclusion.

XIII.
$f(t)=\frac{a-|t|}{a}$ sur $]-a,a[$ et $f(t)=0$ sur $[-\pi,-a]\cup[a,\pi[$ $0<a<\pi$.

1°. Déterminer la série de Fourier associée à f.

f est paire et $b_n=0$; $a_0=\frac{a}{2\pi}$ et $a_n=\frac{2(1-\cos na)}{n^2a\pi}$

$\Rightarrow S(x)=\frac{a}{2\pi}+\frac{2}{a\pi}\sum_{n\geq1}\frac{1-\cos na}{n^2}\cos nx$

2°. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos na}{n^2}=\frac{a\pi}{2}-\frac{a^2}{4}$ en appliquant le théorème de Dirichlet en $x=0$

XIV.
$f(x)=x-E(x)$ est 1-périodique ; elle n'est ni paire ni impaire et l'on va donc utiliser les coefficients de Fourier complexes.

$c_n=\int_0^1(x-E(x))e^{-2\pi inx}dx=\int_0^1xe^{-2\pi inx}dx=\frac{-1}{2\pi in}$

$c_0=\frac{1}{2}$ donc $S(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n\neq0}\frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in}$

XV.
1°. $\frac{1}{1-z}=1+\sum_{n\geq1}z^n$ si $|z|<1$ donc

$\frac{1+z}{1-z}=1+2\sum_{n\geq1}z^n$

2°. On pose $z=re^{ix}$ pour $r\in]0,1[$; alors
$\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}+i\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}$
$=1+2\sum_{n\geq1}r^ne^{inx}=1+2\sum_{n\geq1}(r^n\cos nx+ir^n\sin nx)$

En égalant partie réelle et imaginaire, on obtient :
$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n\geq1}r^n\cos nx$ et

$\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=2\sum_{n\geq1}r^n\sin nx,\ x\in\mathbb{R}.$

3°. $\ln(1-2r\cos x+r^2)=2\sum_{n\geq1}r^n\frac{-\cos nx}{n}$ et en prenant la limite quand r tend vers 1^-, on obtient :
$\ln(2(1-\cos x))=2\sum\frac{-\cos nx}{n}$ ie
$-\ln\sin\frac{x}{2}=\sum_{n\geq1}\frac{\cos nx}{n}$

XVI.
$f(x)=\ln(2\sin\frac{x}{2})$

1°.
$\int_0^{\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})dx=\pi\ln2+\int_0^{\pi}\ln(\sin\frac{x}{2})dx=\pi\ln2-\pi\ln2=0$
en posant $u=x/2$

$f\exists$ ssi $\sin(x/2)>0\iff x\in]0,2\pi[$
$\ln(2\sin(x/2))$ est 4π-périodique définie sur $]2k\pi,2(k+1)\pi[$ donc f est 2π-périodique (par définition) et définie sur $\mathbb{R}/\ \{2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

Etudions f sur $]0,2\pi[$: $f'(x)=\frac{1}{2}cotan\frac{x}{2}\geq0$ si $x\in]0,\pi[$
$f(x)\geq0\iff2\sin(x/2)\geq1\iff x\in[\pi/3;5\pi/3]$ et $f(\pi)=\ln2$ est un maximum.

2°. $\int_0^{\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\ dx=\pi\ln2+\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx$ posons $u=x/2$

$=\pi\ln2+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u)(2du)=\pi\ln2-\pi\ln2=0$ (cf. exo 5).

3°.
$cotan\frac{x}{2}[\sin((n+1)x)-\sin(nx)]=\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}[2\cos(\frac{2n+1}{2}x)\sin(\frac{x}{2})]$
$=2\cos(\frac{2n+1}{2}x)\cos\frac{x}{2}=\cos(\frac{x}{2}+\frac{2n+1}{2}x)+\cos(\frac{x}{2}-\frac{2n+1}{2}x)$

$= \cos((n+1)x) + \cos(nx)$

4°. En déduire que $I_n = \pi \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \cos((n+1)x)dx + \int_0^\pi \cos(nx)dx$
$= \frac{\sin((n+1)x)}{n+1} - \frac{\sin(nx)}{n}]_0^\pi = 0$
Ainsi, $\forall n$, $I_n = I_{n+1} = I_1 = \pi$
En effet, $I_1 = 2\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}dx = (x+\sin x)_0^\pi = \pi$

5°. En effectuant une intégration par parties, en déduire les coefficients de Fourier de f

f est paire donc $b_n = 0$. Par ailleurs,
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(2\sin\frac{x}{2})dx = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})\cos(nx)dx = 0 - \frac{2}{2n\pi}I_n = -\frac{1}{n}$
Ainsi, $S(x) = -\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n}$

6°. f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?

Pour une fois la réponse est non car $f(x)$ tend vers l'infini en $2k\pi$ et n'a donc pas de demi-dérivée en ce point. Par contre, f est de classe C^∞ sur $]0, 2\pi[$ où l'on peut appliquer le théorème.

8°. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ En $x = \pi$, f est continue et $f(\pi) = S(\pi)$ donc $\ln 2 = -\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$

XVII.
Soient $\epsilon > 0$ et f_ϵ la fonction 2π périodique définie par $f_\epsilon(x) = 1$ pour $x \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ et $f_\epsilon(x) = 0$ pour $x \in [0, \epsilon[\cup]2\pi - \epsilon, 2\pi]$

$a_0 = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} dx/2 = \pi - \epsilon$ et
$a_n = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \cos nx \ dx = -\frac{2}{n}\sin(n\epsilon)$ d'où
$S(x) = \pi - \epsilon - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\epsilon)}{n}\cos nx$

En $x = \epsilon$, le théorème de Dirichlet donne $S(\epsilon) = \frac{1}{2}(0+1)$ ie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\epsilon)\cos(n\epsilon) = \frac{2(\pi-\epsilon)-1}{4}$

Applications

XVIII. Solutions périodiques d'équations différentielles.
1°. Si y est une fonction 2π-périodique, alors y'' et $y'' + y$ le sont aussi et il est donc nécessaire que g soit périodique. Puisque g est de classe C^1, elle est donc développable en série de Fourier et l'on a
$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx}$

Soit f une solution ; f est aussi C^1 (et même C^3) et $f(x) = \sum c_n(f)e^{inx} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n\neq 0} inc_n(f)e^{inx}$
$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n\neq 0} -n^2c_n(f)e^{inx}$ par linéarité et unicité de la série de Fourier, on en déduit que
$-n^2c_n(f) + c_n(f) = c_n(g) \ \forall n \neq 0$ ie $c_n(f) = \frac{c_n(g)}{1-n^2}$ et $c_1(g) = c_{-1}(g) = 0$ La série est en outre convergente car g est C^1 donc $c_n(g) = o(\frac{1}{n})$ et $c_n(f) = o(\frac{1}{n^3})$
La condition nécessaire et suffisante est donc g 2π-périodique et $c_0 = c_1 = c_{-1} = 0$

2°. $y'' + y = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\cos nx$
La fonction du second membre est paire donc y est paire. D'après la question précédente, le développement en série de Fourier de y est $y(x) = \sum_{n\geq 2} a_n\cos nx$, en dérivant deux fois puis en injectant dans l'équation, on obtient $y + y'' = \sum_{n\geq 2}(1-n^2)a_n\cos nx$ et par unicité de la série de Fourier, $a_n = \frac{1}{n^2(1-n^2)}$. Donc $y(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{\cos nx}{n^2(1-n^2)}$

XIX. Phénomène de Gibbs.
1°. On a déjà fait ce calcul. Rappelons que
$S(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

2°. $S'_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)x) = \mathbb{R}e\left(\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x}\right)$
$= \mathbb{R}e\left(\frac{1-e^{2(n+1)ix}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{\sin((n+1)x)\cos((n+1)x)}{\sin x}$
$= \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+2)x)}{\sin x} \ x \neq k\pi$
Ainsi, $S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nu)}{\sin u}du$
$S'_n(x) = 0 \iff x_k = \frac{\pi k}{2n+2}$, $k = 0, ..., 2n+1$

3°.
• $S_1(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ et $S'_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{\sin x}$
De l'étude de la dérivée, on voit que la fonction admet une premier maximum M_1 atteint en $x = \pi/4$ et ce maximum vaut $M_1 = 2\sqrt{2}/3$
• $S21(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$ et $S'_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{\sin x}$
Le premier max de cette fonction est atteint en $x = \pi/6$ et vaut $M_2 = 14/15$

4°. Le premier maximum de S_n sur $]0, \pi[$ est atteint en $x_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ et vaut donc
$M_n = S_n(x_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}\sin\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

XX. Effet d'une cellule RC.
1°. Soient e_1 et e_2 deux signaux d'entrée correspondant à des sorties $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Le système est linéaire ssi la sortie correspondant à $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2$ est $\lambda_1s_1 + \lambda_2s_2$. Il est invariant dans le temps si $e(t+u)$ provoque la sortie $s(t+u)$

2°. Si $e(t) = e(t+T) \ \forall t \in \mathbb{R}$, alors $s(t) = s(t+T)$ en prenant $T = u$; ainsi, e périodique implique s périodique.

3°. $e(t) = e^{2\pi i\nu t} \Rightarrow e(t+u) = e(t)e(u)$
Si t est constant alors $e(t)$ est constant et par linéarité du système, la sortie sera $e(t)s(u)$

4°. De $s(t+u) = s(u)e(t)$ on a pour $u = 0$,
$s(t) = s(0)e(t) = H(\nu)e(t)$

5°. $RCs'(t) + s(t) = e(t)$
$s(t) = H(\nu)e(t) \Rightarrow s'(t) = H(\nu)2\pi i\nu e(t)$ ie
$H(\nu) = \dfrac{1}{1 + RC2\pi i\nu} \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty} |H(\nu)| = 0$

XXI. Filtrage et redresseur de tension.

On considère deux circuits : le premier est constitué d'un filtre RC et d'un redresseur mono-alternance, le second est constitué du même filtre et d'un redresseur bi-alternance. Ces deux circuits sont alimentés par une tension sinusoïdale $u(t) = U\sin(\omega t)$
On note $T = 2\pi/\omega$ la période de $u(t)$ et l'on commence par étudier le premier montage.

1°. Démontrer que $e(t)$ est une fonction T périodique définie par $e(t) = \begin{cases} U\sin(\omega t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ 0 & \text{si } t \in [T/2, T] \end{cases}$
2°. Développer $e(t)$ en série de Fourier.
3°. Déterminer la puissance moyenne dissipée dans la résistance et l'exprimer à l'aide des coefs de Fourier de $e(t)$.
4°. Déterminer le développement en série de Fourier de $s(t)$ et en déduire que la cellule RC est un filtre passe-bas. Déterminer sa pulsation de coupure ω_0.
5°. On suppose que $\omega_0 = 2\omega$. Etudier alors la fonction $s(t)$.
6°. On étudie maintenant le second montage. Démontrer que $e(t) = U|\sin(\omega t)|$ et reprendre les questions précédentes.

XXII. Equation de la chaleur.

1°. Soit E l'ensemble des fonctions f de $[0,\pi]\times[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions ci dessous :
- u est continue sur $[0,\pi]\times[0,+\infty[$
- u est C^2 sur $]0,\pi[\times]0,+\infty[$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
- $u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$
- $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

où λ est une constante à déterminer en fonction de n.
2°. Déduire l'expression de $f(x)$, $g(t)$ et en déduire une famille d'éléments de E.
3°. Soit h la fonction 2π périodique et impaire égale à $x(\pi - x)$ sur $[0,\pi]$.
Déterminer la série de Fourier associée à h et étudier sa convergence.
4°. Déterminer l'unique fonction de E vérifiant la condition :
- $u(x,0) = x(\pi - x) \quad \forall x \in [0,\pi]$.

Interpréter physiquement les résultats obtenus.

XXIII. Equation des cordes vibrantes.

XXII. ENST 2000

On considère l'équation différentielle
$y''(t) + e^{it}y(t) = 0 \;\; (E_1)$

1°. Démontrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et soluion de E_1 est $2\pi-$périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée, mêmes valeurs en 0 et 2π.

Si f est une solution périodique de l'équation, alors f' est aussi périodique et $f(0) = f(2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi)$.
Réciproquement, si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$, alors la fonction $g(t) = f(t + 2\pi)$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $y(0) = f(0)$ et $y'(0) = f'(0)$.
D'après le théorème de Cauchy, la solution étant unique, f et g coïncident, c'est à dire que $f(t) = f(t+2\pi)\ \forall\ t$. f est donc périodique de période 2π.

2°. Soit $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier complexes d'une telle fonction f. Démontrer que
$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$

Comme f est deux fois dérivable, elle est de classe C^1 et est donc égale à la somme de sa série de Fourier en tout point (d'après le théorème de Dirichlet).

3°. Exprimer les coefficients de Fourier de f'' en fonction de ceux de f.
En déduire une relation de récurrence entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$.

On a facilement $c_n(f') = inc_n(f)$ et donc $c_n(f'') = -n^2c_n(f)$. Par ailleurs,
$c_n(f'') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt$
Mais f étant solution de l'équation E_1, alors $f''(t) = -e^{it}f(t)$. En remplaçant dans l'intégrale il vient $c_n(f'') = -c_{n-1}(f)$ et $0^2c_0(f) = c_{-1}(f) = 0$

4°. Préciser la valeur de $c_{-1}(f)$ et en déduire la valeur de tous les coefficients $c_n(f)$ pour $n < 0$.
Exprimer les coefficients $c_n(f)$ en fonction de $c_0(f)$ pour $n > 0$.

D'après le résultat ci-dessus, $c_n(f) = 0$ pour tout $n < 0$.
Enfin, par récurrence, on a $c_n(f) = \dfrac{1}{n!^2}c_0(f)$

5°. En déduire l'expression de $f(t)$.

$$f(t) = c_0(f)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!^2}e^{int}$$

XXIII.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$f(t) = \dfrac{2 - \cos t}{5 - 4\cos t}$

1°. Vérifier l'identité $\Re e\left(\dfrac{1}{2 - e^{it}}\right) = f(t)$ et déterminer les coefficients c_n tels que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$

$$\frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{2 - \cos t + i\sin t}{(2 - e^{it})(2 - e^{-it})} = \ldots = \frac{2 - \cos t + i\sin t}{5 - 4\cos t}$$
En séparant partie réelle et imaginaire.

2°. En déduire l'expression de f sous la forme d'une série trigonométrique.

$\dfrac{1}{2 - e^{it}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - (e^{it}/2)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}e^{int}$ qui est le développement d'une série de Fourier dont les coefficients sont les $c_n = 1/2^{n+1}$

On a $f(t) = \Re e\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}e^{int}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(nt)}{2^{n+1}}$
Par continuité et par linéarité du passage à la partie

réelle.

3°. En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$ pour $k \in \mathbb{N}$

Ces intégrales sont soit nulles, soit égales à 2π, soit égales à π.
