Calculs de séries de Fourier

I.

1°. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π périodique impaire définie sur $]0,\pi[$ par $f(x)=1$ et $f(\pi)=0$.

2°. En appliquant le théorème de Dirichlet calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

II.

1°. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=x^2$.

2°. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

3°. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=x^3$.

III.

1°. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=|x|$.

2°. En appliquant le théorème de Dirichlet, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

IV.

1°. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π périodique définie sur $[0,2\pi[$ par $f(x)=e^{\alpha x}$ $\alpha\neq in$.

2°. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$.

V.

1°. Soit f la fonction 2π périodique, impaire, définie sur $]0,\pi]$ par $f(x)=x-\pi$.
Donner l'allure de la courbre représentative de f sur une période et déterminer sa série de Fourier.

2°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

3°. Appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

VI.

On pose $I_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}(\pi^2-x^2)\cos(nx)dx$ et $J_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}(x)\sin(nx)dx$ pour $n\geq 0$.

1°. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que si $n\geq 1$, $I_n=\dfrac{2}{n}J_n$, puis calculer I_n et J_n.

2°. Soit f la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=\pi^2-x^2$.
Montrer que cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet et déterminer sa série de Fourier.

3°. En appliquant le théorème de Dirichlet calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

4°. En appliquant le théorème de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

VII.

On considère la série de terme général $u_k=\dfrac{1}{4k^2-1}$ et l'on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ sa nième somme partielle.

1°. La série converge-t-elle ? Décomposer u_k en éléments simples, déduire que $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$ $\forall n\geq 1$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

2°. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.
Montrer que f est paire et périodique de période 2π. L'étudier rapidement et tracer sa courbe représentative.

3°. Calculer les coefs de la série de Fourier $S(x)$ associée et déterminer l'expression du nième polynôme de Fourier $S_n(x)$.

4°. f vérifie-t-elle les conditions du théorème de Dirichlet ? En l'appliquant en $x=0$, retrouver les résultats du 1°.

5°. En appliquant ce théorème en $x = \pi$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ en justifiant de sa convergence.
6°. Appliquer le théorème de Parseval à la fonction f.

VIII.
Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique paire *définie sur* $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.
1°. Tracer la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$ et montrer que la série de Fourier associée à f a pour somme
$S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$.
2°. f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
3°. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ sont convergentes ; en appliquant le théorème de Dirichlet, calculer leur somme.
4°. Appliquer le théorème de Parseval à f pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
5°. Déterminer l'expression de $f'(x)$ et démontrer que cette fonction est développable en série de Fourier.
En notant respectivement $a_n(f)$, $b_n(f)$, $a_n(f')$ et $b_n(f')$ les coefficients de Fourier de f et f', démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a :

$$\begin{cases} a_n(f') = nb_n(f) \\ b_n(f') = -na_n(f) \end{cases}$$

8°. En déduire l'expression de la série de Fourier associée à f'.

IX.
Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = \sin x$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$

1°. Tracer rapidement la courbe représentative de f
2°. Déterminer les coefficients de Fourier de f
3°. En déduire l'expression de la série de Fourier.
4°. La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
5°. Appliquer ce théorème pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
6°. Idem pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$
7°. Appliquer le théorème de Parseval à f
8°. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction g 2π-périodique paire définie par :
$g(x) = \cos x$ si $x \in [0, \pi[$ et $g(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$

X.
Soit f la fonction 2π-périodique paire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 1 - x$

1°. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2°. f vérifie-t-elle les conditions du théorème de Dirichlet ?
3°. Démontrer que la série de Fourier de f a pour somme $S(x) = 1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$
4°. En appliquant le théorème de Dirichlet, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$
5°. Appliquer le théorème de Parseval.

XI.
Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos(ax)$, $a \in \mathbb{R}$.
1°. Déterminer la série de Fourier associée à f.
2°. Enoncer le théorème de Dirichlet et l'appliquer en $x = 0$.
3°. En déduire que $\forall u \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{u}{\sin u} = 1 + 2u^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u^2 - n^2\pi^2}$

XII.
On considère la fonction f 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = ch(x)$.
1°. Tracer la courbe représentative de f.
2°. f vérifie-t-elle les conditions du théorème de Dirichlet ?
3°. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner l'expression de la somme de sa série de Fourier.

4°. Appliquer le théorème de Dirichlet en $x = 0$.
5°. Appliquer le théorème de Parseval à f.

XIII.
On considère la fonction f 2π-périodique définie par $f(t) = \dfrac{a - |t|}{a}$ sur $]-a, a[$ et $f(t) = 0$ sur $[-\pi, -a] \cup [a, \pi[$
$0 < a < \pi$.
1°. Déterminer la série de Fourier associée à f.
2°. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos na}{n^2}$.

XIV.
Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = x - E(x)$.
($E(x)$ représente la partie entière de x).

XV.
1°. Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $\displaystyle\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} z^n$.
2°. En déduire que $\forall\ 0 < r < 1$, $\displaystyle\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos nx$ et $\displaystyle\frac{2r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} = 2\sum_{n\geq 1} r^n \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$.
3°. En intégrant terme à terme la série de Fourier, en déduire le développement de $-\ln(2\sin\dfrac{x}{2})$ et celui de $\dfrac{\pi - x}{2}$.

XVI.
Soit f la fonction2π-périodique paire défionie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \ln(2\sin\dfrac{x}{2})$
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} cotan\frac{x}{2}\sin(nx)dx$ pour $n \geq 0$
1°. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2})dx = 0$
2°. Quel est le domaine de définition de f ? Faire l'étude complète de f
3°. Démontrer que $cotan(\dfrac{x}{2})[\sin((n+1)x) - \sin(nx)] = 2\cos(\dfrac{x}{2})\cos((2n+1)\dfrac{x}{2}) = \cos(nx) + \cos((n+1)x)$
4°. En déduire que $I_{n+1} = I_n$, $\forall n > 0$, puis que $I_n = \pi$, $\forall n > 0$
5°. En effectuant une intégration par parties, en déduire les coefficients de Fourier associés à la fonction f
6°. La fonction vérifie-t-elle les conditions du théorème de Dirichlet ?
7°. Appliquer ce théorème pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

XVII.
Soient $\epsilon > 0$ et f_ϵ la fonction 2π périodique définie par $f_\epsilon(x) = 1$ pour $x \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ et $f_\epsilon(x) = 0$ pour $x \in [0, \epsilon[\cup]2\pi - \epsilon, 2\pi]$

1°. Tracer la courbe de f et déterminer sa série de Fourier.
2°. Appliquer le théorème de Dirichlet en $x = \epsilon$

Applications

XVIII. Solutions périodiques d'équations différentielles.

Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
1°. Donner une condition sur g pour que les solutions de l'équation différentielle
$y'' + y = g$ soient 2π périodiques.
2°. Donner la solution générale de l'équation $\displaystyle y'' + y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

XIX. Phénomène de Gibbs.

Soit f la fonction 2π périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 1$, $f(0) = f(\pi) = 0$.
Soit $S_n(x)$ son nième polynôme de Fourier.
1°. Déterminer la série de Fourier associée à cette fonction.
2°. Démontrer que $S_n'(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}$ et en déduire que $S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2nu)}{\sin u}du$.
Déterminer les valeurs de x qui annulent $S_n'(x)$ dans $]0, \pi[$.
4°. Montrer que le premier maximum de la fonction $S_n(x)$ est le réel $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\sin(\frac{2k+1}{2n+2}\pi)$.

5°. A l'aide d'une calculatrice ou d'un Pc, calculer une valeur approchée de M_{50} et conclure.

XX. Cellule RC.

On considère un système linéaire et invariant dans le temps ayant un signal $e(t)$ à l'entrée et $s(t)$ à la sortie.

1°. Rappeler les propriétés d'un tel système.
Si le signal d'entrée est périodique, montrer que le signal de sortie l'est aussi.

2°. On suppose que le signal d'entrée est monochromatique de fréquence u, c'est à dire de la forme $e(t) = e^{2\pi iut}$.
Montrer que $e(t+v) = e(t)e(v)$ et que si l'on suppose t constant, alors $s(t+v) = s(v)e(t)$.
$s(0)$ représente la sortie au temps $t = 0$ et dépend à priori de la fréquence u du signal d'entrée : c'est donc une fonction de u que l'on notera $H(u)$ (c'est la fonction de transfert du système).

3°. Montrer que la sortie $s(t)$ peut s'écrire sous la forme $s(t) = H(u)e(t)$.

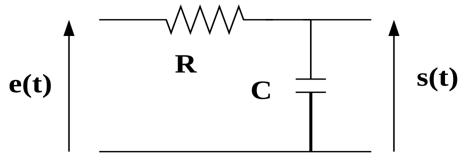
Considérons maintenant une cellule RC dans laquele $e(t)$ et $s(t)$ sont des tensions à l'entrée et à la sortie de la cellule. On admet qu'elles sont reliées par l'équation différentielle

$$RCs'(t) + s(t) = e(t)$$

Après une période transitoire, la cellule RC entre en régime permanent et se comporte alors comme un système linéaire invariant dans le temps.

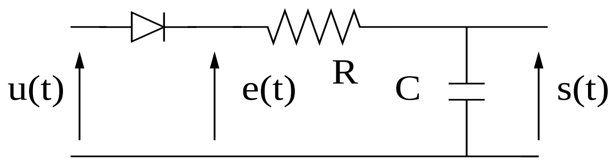
4°. On prend comme signal d'entrée $e(t) = e^{2\pi iut}$.
A l'aide des questions précédentes, déterminer la fonction de transfert $H(u)$ du système et calculer $\lim\limits_{u\to+\infty} |H(u)|$.

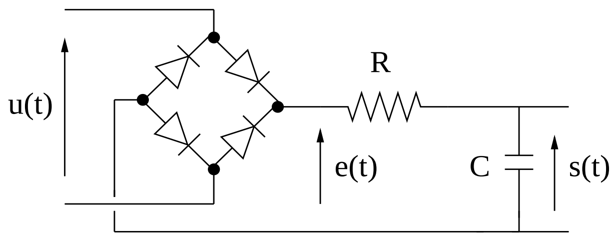
5°. On applique à l'entrée de la cellule un signal $e(t) = E\cos(2\pi ut + \phi)$ et l'on note $\theta(u) = \arg(H(u))$.
Démontrer que $s(t) = E\,|H(u)|\cos(2\pi ut + \phi + \theta(u))$ et interpréter physiquement l'effet d'une telle cellule.



XXI. Filtrage et redresseur de tension.

On considère deux circuits : le premier est constitué d'un filtre RC et d'un redresseur mono-alternance, le second est constitué du même filtre et d'un redresseur bi-alternance. Ces deux circuits sont alimentés par une tension sinusoïdale $u(t) = U\sin(\omega t)$





On note $T = 2\pi/\omega$ la période de $u(t)$ et l'on commence par étudier le premier montage.

1°. Démontrer que $e(t)$ est une fonction T périodique définie par $e(t) = \begin{cases} U\sin(\omega t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ 0 & \text{si } t \in [T/2, T] \end{cases}$
2°. Développer $e(t)$ en série de Fourier.
3°. Déterminer la puissance moyenne dissipée dans la résistance et l'exprimer à l'aide des coefs de Fourier de $e(t)$.
4°. Déterminer le développement en série de Fourier de $s(t)$ et en déduire que la cellule RC est un filtre passe-bas.
Déterminer sa pulsation de coupure ω_0.
5°. On suppose que $\omega_0 = 2\omega$. Etudier alors la fonction $s(t)$.
6°. On étudie maintenant le second montage. Démontrer que $e(t) = U|\sin(\omega t)|$ et reprendre les questions précédentes.

XXII. Equation de la chaleur.

C'est Joseph Fourier qui a premier résolu l'équation de la chaleur par la méthode qui suit, en 1801, dans son traité sur la théorie de la chaleur.

Soit E l'ensemble des fonctions f de $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions ci dessous :

- u est continue sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$

- u est C^2 sur $]0,\pi[\times]0,+\infty[$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
- $u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

1°. On suppose l'existence de $u \in E$ de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer que f et g satisfont

$$\begin{cases} f''(x) - \lambda f(x) = 0 \\ g'(t) - \lambda g(t) = 0 \end{cases}$$

où λ est une constante à déterminer en fonction de n.

2°. Déduire l'expression de $f(x)$, $g(t)$ et en déduire une famille d'éléments de E.

3°. Soit h la fonction 2π périodique et impaire égale à $x(\pi - x)$ sur $[0,\pi]$.
Déterminer la série de Fourier associée à h et étudier sa convergence.

4°. Déterminer l'unique fonction de E vérifiant la condition $u(x,0) = x(\pi - x) \quad \forall x \in [0,\pi]$.
Interpréter physiquement les résultats obtenus.

XXIII. Equation des cordes vibrantes.

C'est D'Alembert qui a le premier étudié cette équation vers 1746 et Bernoulli en 1750 qui a décrit les solutions sous forme de sommes trigonométriques. L'équation a la forme suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t)$$

Dans laquelle $v(x,t)$ représente la forme d'une onde au point x et à l'instant t et c représente la célérité de l'onde dans le milieu où elle se propage. Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, c représente la vitesse de la lumière. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles pilotant beaucoup de phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde électromagnétique, d'une onde sonore, vibrations d'une corde, etc. Nous allons prendre comme premier exemple celui d'une corde de guitare que nous supposerons modélisée par un segment de longueur π (afin de pouvoir travailler avec des fonctions 2π-périodiques) attachée à ses deux extrémités et lachée au temps $t = 0$ sans vitesse initiale. Le problème revient alors à déterminer toutes les fonctions $v(x,t)$ de classe C^2 vérifiant en outre les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad v(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad v(\pi,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & \forall x \in [0,\pi] \\ \bullet \quad v(x,0) = \psi(x) & \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$

La fonction $\psi(x)$ représente la forme initiale de la corde au repos.

1°. On suppose que les solutions peuvent s'écrirent sous la forme $v(x,t) = f(x)g(t)$ où f et g sont des fonctions de classe C^2. Montrer qu'alors f et g sont solutions des équations différentielles ci-dessous (où $\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} f''(x) - \lambda f(x) = 0 & (*) \\ g''(t) - \lambda c^2 g(t) = 0 & (**) \end{cases}$$

2°. Donner la solution générale de l'équation $(*)$. En utilisant les conditions initiales, démontrer que $\lambda < 0$ et en déduire que l'on peut poser $\lambda = -\omega^2$. Démontrer qu'alors $\omega = n \in \mathbb{Z}$, puis en déduire que $f(x) = \alpha \sin(nx)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

3°. Démontrer de la même façon que $g(t) = \beta \cos(nct)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

4°. En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall c_n \in \mathbb{R}$, les fonctions $v(x,t) = c_n \sin(nx)\cos(nct)$ sont solutions de l'équation des ondes.

Posons

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sin(nx)\cos(nct)$$

Nous avons superposé une infinité de solutions de l'équation. D'après le principe de superposition, nous admettrons que, sous réserve de convergence de la série, cette expression est encore solution de l'équation des ondes. Il reste à exprimer les coefficients c_n en fonction de $\psi(x)$ qui représente la forme de la corde à $t = 0$.

5°. Démontrer que $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sin(nx)$

6°. Soit $\tilde{\psi}(x)$ la fonction 2π-périodique impaire égale à $\psi(x)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Déduire de la question précédente et sans calculs les coefficients de Fourier de $\tilde{\psi}(x)$ et en déduire que la solution de l'équation des ondes satisfaisant les conditions initiales ci-dessus. On admettra que cette solution est unique. Que pensez-vous de la forme de cette fonction ?

7°. Expliciter la solution dans le cas d'une "corde pincée". Cela signifie que la forme de la corde à $t = 0$ est donnée par la fonction

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Problèmes de concours

XXIV. ENST 2000

On considère l'équation différentielle $y''(t) + e^{it}y(t) = 0 \quad (E_1)$

1°. Démontrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et soluion de E_1 est $2\pi-$périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée, mêmes valeurs en 0 et 2π.
2°. Soit $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier complexes d'une telle fonction f. Démontrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$
3°. Exprimer les coefficients de Fourier de f'' en fonction de ceux de f.
En déduire une relation de récurrence entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$.
4°. Préciser la valeur de $c_{-1}(f)$ et en déduire la valeur de tous les coefficients $c_n(f)$ pour $n < 0$.
Exprimer les coefficients $c_n(f)$ en fonction de $c_0(f)$ pour $n > 0$.
5°. En déduire l'expression de $f(t)$.

XXV.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{2 - \cos t}{5 - 4\cos t}$

1°. Vérifier l'identité $\Re e\left(\dfrac{1}{2 - e^{it}}\right) = f(t)$ et déterminer les coefficients c_n tels que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$

2°. En déduire l'expression de f sous la forme d'une série trigonométrique.

3°. En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$ pour $k \in \mathbb{N}$

XXVI. BE 2001

Pour tout couple f, g de fonctions 2π-périodiques intégrables, on note $f \star g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$
$f \star g$ s'appelle le produit de convolution de f et g.

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{ikx}$. On pose $T(x) = S(x) + S(-x) - 1$

Soient également $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} a^{|k|}e^{ikx}$

1°. Démontrer que $S(x) = \dfrac{1}{1 + ae^{ix}}$ et déterminer la série de Fourier de $T(x)$.

2°. Démontrer que $T(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a\cos x}$ et que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{1 + a^2 - 2a\cos x}dx = \frac{2\pi a^k}{1 - a^2}$

3°. Démontrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + a^2 - 2a\cos x)^2} = \frac{1 + a^2}{(1 - a^2)^3}$

4°. Montrer que $f(x)e^{iNx} = \dfrac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}$

5°. Déterminer le développement en série de Fourier de $Q(x)$ et démontrer que $Q(x) = f \star T(x)$

6°. Démontrer que $f(x) = \dfrac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$

XXVII. Exercices de la banque d'épreuves.

Dans les questions suivantes, on donne une fonction périodique qu'il faut développer en série de Fourier, puis appliquer le cas échéant le théorème de Dirichlet et/ou celui de Parseval.

1°. Soit f la fonction périodique de période 2 définie par $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$ pour $x \in [-1, 1]$.
Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet.
Soit $g(x) = \int_{-1}^{1} f(t)f(t-x)dt$. Déterminer la série de Fourier de g. Quelles sont les propriétés de g ?
Déterminer $\lim_{x \to 0} g(x)$

2°. Soit f la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = \cos x$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $f(x) = 0$ si $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$. Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

3°. Soit f la fonction périodique de période 2, paire, définie par $f(x) = 1 - 2|x|$ pour $x \in [-1/2, 1/2]$ et $f(x) = 0$ si $1/2 \leq |x| \leq 1$. Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet.

4°. Soit f la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = (\pi - x)/2$ pour $x \in]0, 2\pi[$ et $f(0) = 0$. Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = f(x)$ avec $y(0) = y(2\pi)$

5°. Soit la fonction f de période 2, impaire, définie par $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ si $0 < x \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $\frac{1}{2} < x \leq 1$.
Déterminer sa série de Fourier $S(x)$ et appliquer le théorème de Dirichlet. On note aussi g la primitive de f telle que $g(-1) = 0$. Déterminer sa série de Fourier $T(x)$ et lui appliquer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

6°. Soit f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = 1$ si $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \frac{2}{\pi}(\pi - x)$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. Déterminer sa série de Fourier $S(x)$ et appliquer le théorème de Dirichlet.
Soit g la fonction réelle paire de période 2π définie par $g(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x$ si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = 0$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$.
Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x + \pi)$, déterminer sa série de Fourier $T(x)$ et lui appliquer le théorème de Parseval.

7°. Soit f la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 0$ si $\pi < x < 2\pi$.
Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.
Soit $g(x) = f(x) + f(-x)$. Déterminer son développement de Fourier et lui appliquer le théorème de Dirichlet et de Parseval.

8°. Soit f la fonction périodique de période 1 définie par $f(x) = \cos(\pi a(1 - 2t))$ pour $x \in [0, 1[$ et $a \notin \mathbb{Q}$. Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

9°. Soit f la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = \sin x$ pour $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 0$ si $\pi \leq x \leq 2\pi$.
Déterminer la somme $S(x)$ de sa série de Fourier. Appliquer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.