MATHEMATIQUES TD N°4 : FONCTIONS - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction indicatrice de A et l'on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

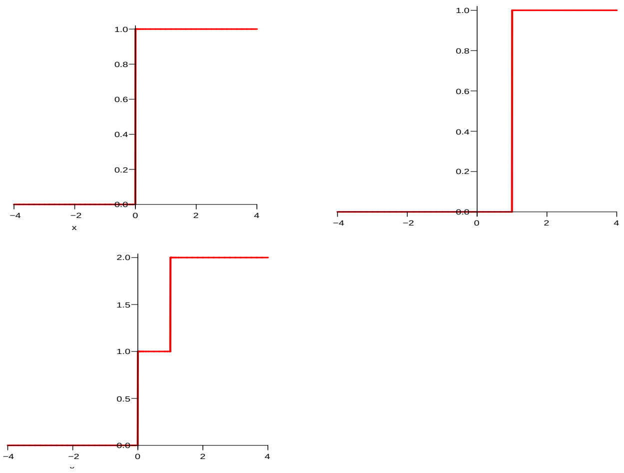
1°. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. On note $\bar{A}$ le complémentaire de l'ensemble A. Démontrer que :

Une fonction indicatrice ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1. Il suffit de tester pour ces deux valeurs : $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 \iff x \in A$ et $x \in B \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1$

De la même façon, $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 \iff x \in A$ ou $x \in B$. Enfin $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x) = 0$

2°. On note $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ la fonction de Heaviside ; il s'agit de l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$
Les physiciens l'appellent aussi fonction échelon ou fonction unité. Tracer la courbe représentative de $H(x)$ et étudier la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Tracer $H(x) + H(x-1)$ ainsi que $H(x+1)$.

Cette fonction vaut 1 sur $\mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}_-$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}/\{0\}$ et n'est pas continue en 0. $H(x-1)$ est la fonction retardée de $H(x)$ d'un facteur 1. C'est donc aussi l'indicatrice de $[1, +\infty[$. Il faut bien faire attention au fait que le passage de x à $x-1$ traduit un retard car la fonction "commence" plus tard (dans le sens des abscisses positives). Ainsi, $H(x) + H(x-1)$ prend 3 valeurs : elle est nulle avant 0, vaut 1 sur $[0, 1[$ et 2 sur $[1, +\infty[$.



3°. On pose $\Pi(x) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$.
Tracer la courbe représentative de $\Pi(x)$ et expliquer pourquoi on l'appelle fonction porte.
Tracer de même $\Pi(2x)$, $3\Pi(x)$ et $\Pi(x-1)$. Etant donné x_0, L, ϵ, tracer la courbe de $\epsilon \times \Pi(\dfrac{x-x_0}{L})$

C'est évident : cette fonction vaut 1 entre $-1/2$ et $1/2$ et 0 ailleurs. La courbe $\Pi(2x)$ est contractée d'un facteur 2 par rapport à la courbe précedente : c'est une porte entre $-1/4$ et $1/4$. La courbe $3\Pi(x)$ vaut 3 entre sur $[-1/2, 1/2]$ et 0 ailleurs. $\Pi(x-1)$ est la retardée de $\Pi(x)$ d'un facteur 1 ; c'est donc l'indicatrice de $[1/2, 3/2]$.

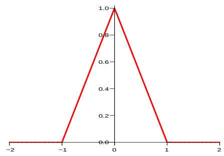
Enfin, la fonction $\epsilon \times \Pi(\dfrac{x-x_0}{L})$ est une porte de largeur L centrée x_0 qui vaut ϵ sur l'intervalle en question et 0 ailleurs.

4°. Etant donné une fonction $f(x)$ quelconque dont on se donne la courbe, tracer la courbe de la fonction $f(x) \times \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ et expliquer pourquoi la multiplication par une indicatrice s'appelle un fenêtrage.

La courbe de $f(x) \times \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$ et confondue avec la courbe de f sur $[a, b]$.

5°. Soit $\Delta(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Tracer la courbe représentative de $\Delta(x)$

Il s'agit de la fonction triangle : elle est nulle à l'extérieur de $[-1, 1]$, vaut $1 + x$ sur $[-1, 0]$ et vaut $1 - x$ sur $[0, 1]$



6°. Soit $f(x) = t \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Tracer la courbe de $f(2x)$, $2f(x)$, $f(-x)$, $f(x-1)$, $f(x-1) + f(1-x)$ et $f(\dfrac{x}{2})$.

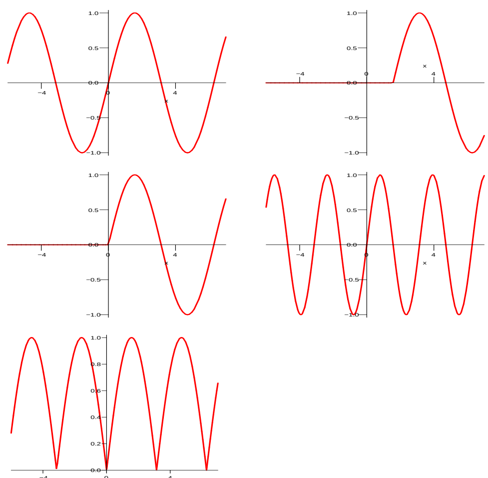
$f(x)$ est une droite de pente 1 entre 0 et 1 et est nulle à l'extérieur de cet intervalle.

II

Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = e^{-x}$.

1°. Déterminer les courbes représentatives des signaux ci-dessous :

$f(2\pi x)$ $f(\dfrac{x}{2})$ $2 \times f(x)$ $f(x) \times H(x)$ $f(x - \pi/2)$
$f(x - \pi/2) \times H(x - \pi/2)$ $|f(x)|$ $f(x) \times 1_{[0,\pi]}(x)$



2°. Déterminer et tracer la courbe de la fonction $p(x)$ paire, égale à $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer et tracer la courbe de la fonction $i(x)$ impaire, égale à $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Tracer la courbe de la fonction périodique de période 1 égale à $g(x)$ sur $[0, 1[$.

Etudier la continuité des trois fonctions ci-dessus.

III

1°. Considérons la fonction $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$

Déterminer son domaine de définition et étudier sa continuité sur ce domaine. Est-elle prolongeable par continuité ? Est-elle dérivable ?

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 0. La fonction f n'est pas définie en 0, elle n'est donc ni continue ni dérivable en ce point. Par contre, $|x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ ce qui prouve, d'après le théorème des gendarmes, que $f(x)$ tend vers 0 en 0. On peut donc prolonger cette fonction par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ et $f(x) = g(x)$ si $x \neq 0$. La fonction g est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$ et est coïncide avec f $\forall x \neq 0$. C'est ce que l'on appelle un prolongement par continuité.

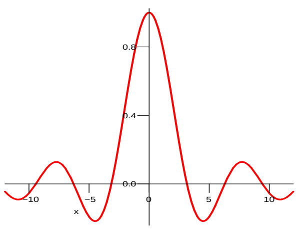
Par ailleurs, $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0. Elle n'est pas dérivable en 0 (elle est par contre dérivable en tout $x \neq 0$).

2°. Considérons la fonction sinus cardinal $sc(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Déterminer son domaine de définition et étudier continuité et dérivabilité sur ce domaine. Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative.

f est définie si $x \neq 0$. Elle n'est donc ni continue ni dérivable en 0. En appliquant la règle de l'Hospital, on voit facilement que $sc(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0. On peut donc prolonger sc par continuité en posant $g(0) = 1$ et $g(x) = sc(x)$ pour tout x non nul. La fonction g est alors continue sur $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exo, nous continuerons à utiliser la notation sc pour le prolongement par continuité de cette fonction.

$sc'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x)$ qui possède une limite quand $x \to 0$. sc est donc dérivable en 0. Le sinus cardinal ressemble à une vaguelette qui oscille en s'atténuant. Ce n'est pas une fonction périodique !! $sc(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$. Voici l'allure de la courbe :



IV

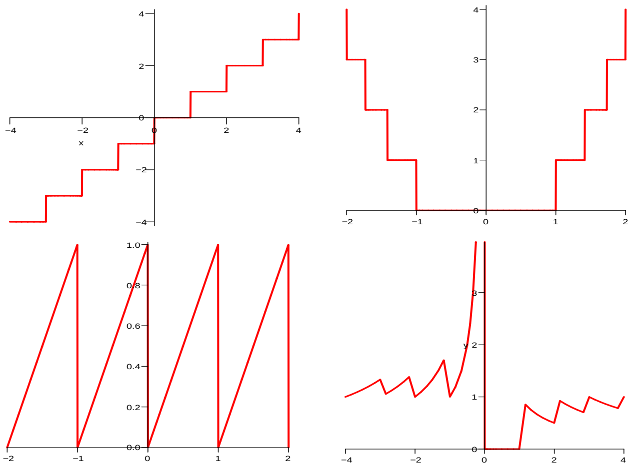
Soit $E(x)$ la fonction partie entière.

1°. Rappeler la définition de $E(x)$.

$E(x)$ est le plus grand entier relatif n inférieur ou égal à x. Ainsi, $n = E(x) \iff n \leq x < n+1$
C'est une fonction continue et constante sur tout intervalle $]k, k+1[$ avec $E(x) = k$ (k entier), avec des discontinuités en tout $x \in \mathbb{Z}$.

2°. Etudier les fonctions $E(x^2)$, $x - E(x)$, $xE(x)$ et $\dfrac{E(x)}{x}$

$\{x\} = x - E(x)$ s'appelle la partie fractionnaire de x. C'est une fonction périodique de période 1, continue sur tout intervalle $]k, k+1[$ (on a $f(x) = x$ sur $]0, 1[$) et qui possède des discontinuités en $k \in \mathbb{Z}$.



V

Il est préférable d'attaquer cet exercice après avoir étudié quelques fonctions des exercices ci-dessous...

1°. Il y a trois choses à faire pour déterminer la réciproque d'une fonction. Il faut d'abord étudier le domaine de définition et déterminer un intervalle sur lequel la fonction va être bijective. Ensuite, sur cet intervalle, il résoudre l'équation $y = f(x)$ en exprimant x en fonction de y :

• $f(x) = \ln(1+2x)$
$\mathcal{D}_f =]-1/2, +\infty[$ et $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$
$y = \ln(1+2x) \iff e^y = 1+2x \iff x = \frac{1}{2}(e^y - 1)$
f^{-1} est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-1/2, +\infty[$ définie par la formule ci-dessus.

• $f(x) = e^{-x^2}$
Cette fonction a la forme d'une cloche (étudiez-là !). Elle est continue et définie sur $\mathbb{R}$. Elle est bijective sur $[0, +\infty[$ (par exemple) et l'intervalle image est alors $]0, 1]$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ et $f(\mathcal{D}_f) =]0, 1]$
$y = e^{-x^2} \iff \ln y = -x^2 \iff x = \sqrt{\ln\frac{1}{y}}$
La fonction f^{-1} sera définie de $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

• $f(x) = \sin x^2$
Cette fonction n'est pas périodique !! Elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais pour être bijective, il faut choisir un intervalle sur lequel elle sera monotone. x^2 est bijective sur $[0, +\infty[$ et $\sin x$ est bijective sur (par exemple), $[-\pi/2, \pi/2]$. Ainsi, $f(x)$ sera continue et monotone (donc bijective) sur (par exemple) $[0, \sqrt{\pi/2}]$. Cet intervalle est envoyé par la fonction sur $[0, 1]$.
$\mathcal{D}_f = [0, \sqrt{\pi/2}]$ et $f(\mathcal{D}_f) = [0, 1]$
$y = \sin x^2 \iff \arcsin y = x^2 \iff x = \sqrt{\arcsin y}$
et cette fonction est définie de $[0, 1]$ dans $[0, \sqrt{\pi/2}]$

• $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$
$\mathcal{D}_f =]-1, 1[$ et $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$
Pour déterminer ce domaine de définition, il faut étudier $\phi(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

$\phi'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ et ϕ est croissante sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ qu'elle envoie respectivement sur $]-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.
Par ailleurs, $f(x) = \ln\phi(x)$ et $f(x)$ existe ssi $\phi(x) > 0$, ie $x \in]-1, 1[$ Enfin, $\ln\phi(\mathcal{D}_f) = \ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$
Un calcul rapide donne $\phi^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
$y = f(x) \iff 2y = \ln\phi(x) \iff x = \phi^{-1}(e^{2y})$
$\iff x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

VI

1°. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$

2°. $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+x+1}$ $f'(x) = \dfrac{x^2+16x+7}{(x^2+x+1)^2}$

3°. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}(x-1)^2}$

4°. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$

5°. $f(x) = e^{\sin(x^2)}$ $f'(x) = 2x\cos(x^2)\exp(\sin(x^2))$

6°. $f(x) = \dfrac{3\ln x + 1}{\ln x - 2}$ $f'(x) = \dfrac{-7}{x(\ln x - 2)^2}$

7°. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ln x$ $f'(x) = e^{1/x}\dfrac{x - \ln x}{x^2}$

8°. $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^x$
$f'(x) = \left(\ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x+1}\right)e^{x\ln(1+1/x)}$

VII

1°. $f(x) = x^3 - 3x + 1$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
f croissante $\iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
$f''(x) = 6x$
f convexe $\iff x \in]0, +\infty[$
donc $O(0,0)$ est un point d'inflexion
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$
Il y a donc une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$ et la même chose en $-\infty$

2°. $x + \dfrac{1}{x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$
f croissante $\iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ et f convexe $\iff x > 0$
Il n'y a pas de point d'inflexion car $O(0,0)$ n'appartient pas au domaine de définition.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$
Donc $\Delta : y = x$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. De plus, (Oy) est asymptote verticale à la courbe.

3°. $(\dfrac{x+1}{x-1})^2$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{1\}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$
$f'(x) = -4\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$
f croissante $\iff x \in]-1, 1[$
$f''(x) = 8\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $(-2, f(-2))$ point d'inflexion
f convexe $\iff x \in]-2, 1[\cup]1, +\infty[$
(Ox) est asymptote horizontale et $x = 1$ asymptote verticale.

4°. $\dfrac{x^2+2x-4}{x-1}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{1\}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x) = \mp\infty$
$f'(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$ f croissante sur $\mathbb{R}$
$f''(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$ f convexe $\iff x \in]-\infty, 1[$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 3$ et
$\Delta : y = x + 3$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. On a également $x = 1$ qui est asymptote verticale.

5°. $\dfrac{x^3}{x^2-4x+5}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-8x+15)}{(x^2-4x+5)^2}$
f croissante $\iff x \in]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]5, +\infty[$
$f''(x) = 2\dfrac{x(11x^2-60x+75)}{(x^2-4x+5)^3}$
On a trois points d'inflexion d'abscisse $x = 0$, $x = \frac{30-5\sqrt{3}}{11}$ et $x = \frac{30+5\sqrt{3}}{11}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 4$ et
$\Delta : y = x + 4$ est asymptote oblique en $\pm\infty$

6°. $\dfrac{2x^2+3x}{x+2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-2\}$
$f'(x) = 2\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$
$f'(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[\}$
$f''(x) = \dfrac{4}{(x+2)^3}$ f convexe sur $]-2, +\infty[$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^\pm} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 2$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ $\Delta : y = 2x - 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ et $x = -2$ est asymptote verticale.

7°. $\dfrac{1}{x^2+1}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
$f'(x) > 0 \iff x \in]-\infty, 0]$ où f est croissante
$f''(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -\sqrt{3}/3[\cup]\sqrt{3}/3, +\infty[$
Les points d'abscisses $\pm\sqrt{3}/3$ sont donc des points d'inflexion.
(Oy) est clairement asymptote horizontale à la courbe

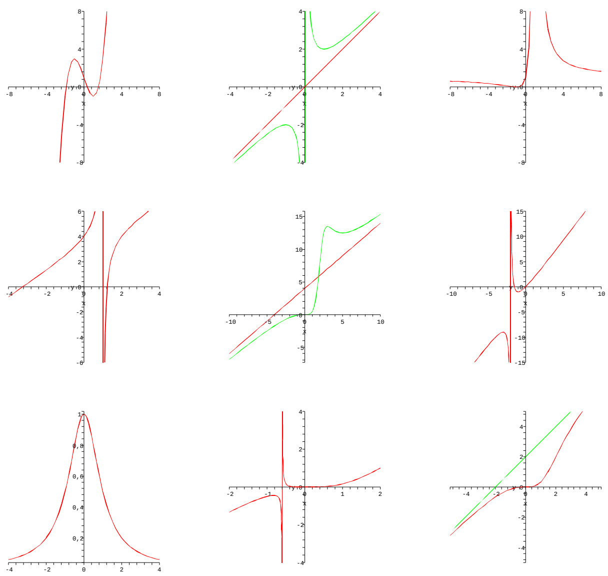
8°. $\dfrac{x^4}{x^3-3x+2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{1, -2\}$

$f'(x) = \dfrac{x^3(x^2+x-8)}{(x^2+x-2)(x^3-3x+2)}$ et
$f''(x) = \dfrac{6x^2(x^2+8)}{(x+2)(x^3-3x+2)^2}$
$f'(x) > 0 \iff$
$x \in]-\infty, -\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}[\cup]0,1[\cup]-\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}, +\infty[$
$f''(x) > 0 \iff x \in]-2,0[\cup]0,+\infty[$ et il n'y a pas de point d'inflexion.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$
Et un calcul facile montre que $\Delta : y = x+3$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.
La courbe possède également deux asymptotes verticales $x = -2$ et $x = 1$

9°. $\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

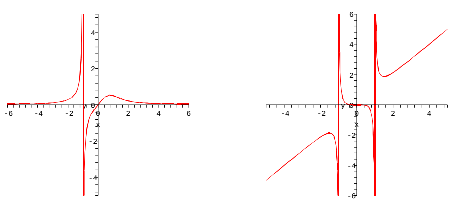
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-4x+12)}{(x^2-2x+4)^2}$ $f''(x) = \dfrac{-48x(x-2)}{(x^2-2x+4)^3}$
f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $x^2-4x+12$ n'a pas de racine et f est convexe sur $[0,2]$, concave ailleurs. 0 et 2 sont les abscisses de points d'inflexion de la courbe. Enfin, $\Delta : y = x+2$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$

Voici les courbes représentatives des 9 premières fonctions :



10°. $\boxed{\dfrac{x}{1+x^3}}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1\}$

11°. $\boxed{\dfrac{x^5}{x^4-1}}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{\pm 1\}$



VIII

1°. $x\ln x$. $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$

$f'(x) = \ln x + 1$ et $f''(x) = \dfrac{1}{x}$
$f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$ et f est convexe sur son domaine de définition.
La fonction possède une branche parabolique d'axe (Oy)

2°. $\dfrac{\ln x}{x}$. $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$
$f'(x) > 0 \iff x \in]0,e[$ et
$f''(x) > 0 \iff x \in]e^{3/2}, +\infty[$
Le point de la courbe d'abscisse $e^{3/2}$ est point d'inflexion.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
On a donc une asymptote verticale en 0 et une horizontale en $+\infty$

3°. $\dfrac{1}{\ln x}$. $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1+\infty[$

$f('x) = \dfrac{-1}{x\ln^2 x}$ et $f''(x) = \dfrac{2+\ln x}{x^2\ln^3 x}$
f est donc décroissante sur son domaine et concave sur $]e^{-2},1[$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

4°. $\dfrac{x}{\ln x}$. $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ et $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{\ln^3 x}$
f est croissante sur $]e,+\infty[$ et convexe sur $]1,e^2[$. Le point d'abscisse e^2 est donc un point d'inflexion de la courbe.
On a une asymptote horizontale en $+\infty$ et verticale en $x = 1$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

5°. x^x . $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$

$f(x) = \exp(x\ln x)$ $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ et
$f''(x) = x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1}$
La fonction est convexe sur son domaine de définition et croissante sur $]e^{-1},+\infty[$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
La courbe admet une branche parabolique d'axe (Oy)

6°. $x^{\frac{1}{x}}$. $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$

$f'(x) = -x^{1/x}\dfrac{-1+\ln x}{x^2}$ et
$f''(x) = \dfrac{1}{x^4}x^{1/x}(\ln x - 2\ln x + 1 + 2x\ln x - 3x)$
Donc la fonction est croissante sur $]0,e[$ et pour ce qui est de la convexité, je ne sais pas car l'expression de $f''(x)$ est trop compliquée. On laisse tomber....
On a par contre $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et
$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

7°. $xe^{\frac{1}{x}}$ $f'(x) = e^{1/x}\dfrac{x-1}{x}$ et $f''(x) = e^{1/x}\dfrac{1}{x^3}$

$f'(x) > 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et $f''(x) > 0$ si $x > 0$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 1$
La courbe admet une asymptote verticale et une asymptote oblique $\Delta : y = x + 1$ en $\pm\infty$

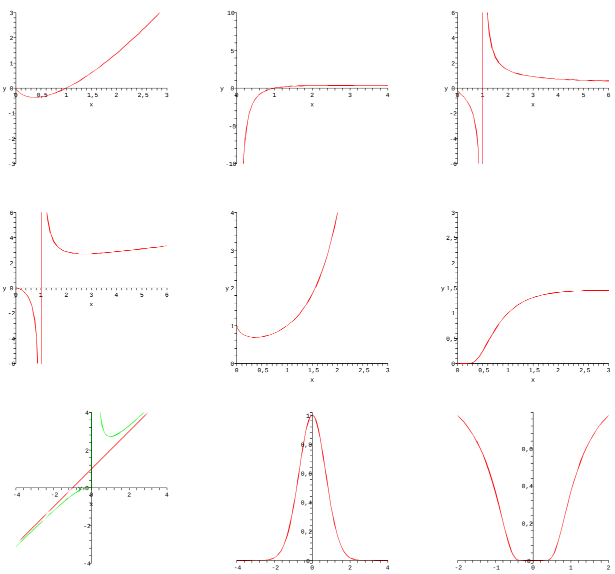
8°. e^{-x^2} . $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

On appelle cette courbe une gaussienne.
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$
Les points d'abscisse $\pm\sqrt{2}/2$ sont points d'inflexion de la courbe.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ on a donc une asymptote horizontale en $\pm\infty$

9°. $e^{-\frac{1}{x^2}}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = e^{-1/x^2}\dfrac{2}{x^3}$ et $f''(x) = -2e^{-1/x^2}\dfrac{3x^2 - 2}{x^6}$
Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et convexe sur $]-\sqrt{6}/3, 0[\cup]0, \sqrt{6}/3[$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
La courbe possède une asymptote horizontale $y = 1$

Voici les courbes représentatives des 9 fonctions précédentes :



10°. $\ln(x - \ln x)$. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ car $x > \ln x$

$f'(x) = \dfrac{x - 1}{x(x - \ln x)}$ et $f''(x) = -\dfrac{-3x + x + x^2 + 1}{x^2(x - \ln x)^2}$
f est croissante sur $]1, +\infty[$. La convexité est trop difficile à calculer, on passe.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$
Il s'agit donc d'une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$. On constate que l'écart entre $f(x)$ et la courbe $\ln x$ tend vers 0 en $+\infty$

11°. $\dfrac{-2}{\ln x - 1}$. $\mathcal{D}_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2}{x(\ln x - 1)^2}$ et $f''(x) = -2\dfrac{1 + \ln x}{x^2(\ln x - 1)^2}$
f est croissante sur son domaine de définition et convexe sur $]e^{-1}, e[$. $1/e$ est abscisse d'un point d'inflexion.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to e^\pm} f(x) = \pm\infty$
La fonction est croissante sur son domaine de définition et convexe sur $]-2, 1 - \sqrt{5}[\cup]0, 1 + \sqrt{5}[$
En l'infini, elle est équivalente à $g(x) = \ln x - 2$

12°. $\ln(1 + x) - \dfrac{2x}{2 + x}$. $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{x^2}{(1 + x)(2 + x)^2}$ et $f''(x) = -\dfrac{x(-4 - 2x + x^2)}{(1 + x)^2(2 + x)^3}$

13°. $xe^{\frac{x}{x^2-1}} = xe^\bullet$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$

$f'(x) = e^\bullet\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^3 - x}{(x^2 - 1)^2} = e^\bullet\dfrac{P(x)}{(x^2 - 1)^2}$
$P(x) = 0$ possède 4 racines que l'on notera $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{2 + 2\sqrt{17}})$
$\beta = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17} - \sqrt{2 + 2\sqrt{17}})$
$\gamma = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{2 - 2\sqrt{17}})$
$\alpha = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{2 - 2\sqrt{17}})$ f est donc croissante sur $]-\infty, \beta[\cup]\alpha, +\infty[$
La dérivée seconde est trop complexe, on la laisse de côté.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm 1^\pm} f(x) = 0, \pm\infty$
$\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ et $x = -1$, $x = 1$ sont asymptotes verticales.

14°. $(x^2 + 1)e^{-x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -(x - 1)^2e^{-x}$ $f''(x) = (x - 1)(x - 3)e^{-x}$
Ainsi, f est décroissante sur son domaine de définition et est concave entre 1 et 3 qui sont les abscisses de deux points d'inflexion.
La courbe admet une branche parabolique d'axe (Oy) en $-\infty$ et une asymptote horizontale (Ox) en $+\infty$

15°. $\dfrac{e\ln x - x}{x^2}$. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{e + x - 2e\ln x}{x^3}$ et $f''(x) = -\dfrac{5e + 2x - 6e\ln x}{x^4}$

16°. $\ln(\sqrt{x} + 1)$. $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{2x^{3/2} + x}{x^{5/2}(\sqrt{x} + 1)^2}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
La courbe possède une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$

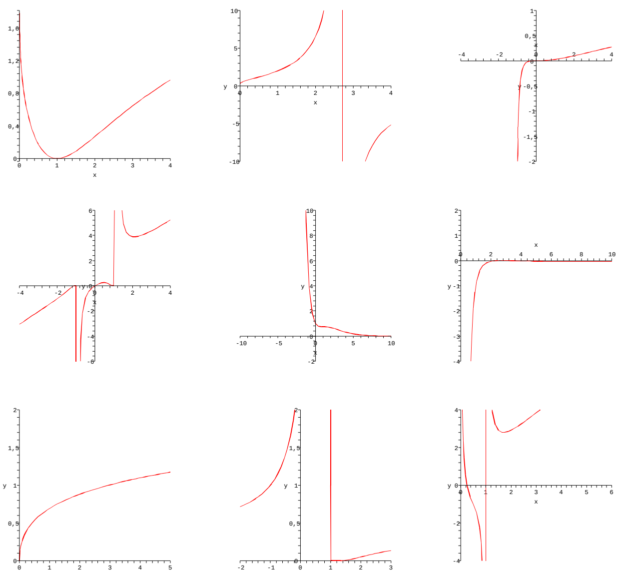
17°. $e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^\bullet$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{1\}$

$f'(x) = 2e^\bullet\dfrac{1}{(-1 + x)^2}$, $f''(x) = -4e^\bullet\dfrac{-2 + x}{(-1 + x)^4}$
f est croissante sur son domaine et 2 est l'abscisse d'un point d'inflexion.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1/e$, $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x) = 0, \infty$ La courbe possède une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

18°. $\log_x(2) + (\ln 2x)^2$. $\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{\ln 2}{\ln x} + (\ln 2x)^2$ $f'(x) = \dfrac{-\ln 2 + 2\ln(2x)\ln^2 x}{x\ln^2 x}$
$f''(x) = -\dfrac{-2\ln 2 - \ln 2\ln x - 2\ln^3 x + 2\ln(2x)\ln^3 x}{x^2\ln^3 x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$
La courbe possède une asymptote verticale et une asymptote horizontale.



IX

1°. $\dfrac{1}{\cosh x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et c'est une fonction paire.

$f'(x) = -\dfrac{sh(x)}{ch^2 x}$ $f''(x) = \dfrac{2sh^2x - ch^2x}{ch^3x} = \dfrac{sh^2x - 1}{ch^3x}$
Posons $\alpha = \text{argsh}(1) = (1/2)\ln(3 + 2\sqrt{2})$. D'après le calcul ci-dessus, $f''(x)$ est positive à l'extérieur de l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ convexe sur $]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ et la courbe a donc une asymptote horizontale (Ox). C'est une courbe en forme de cloche avec un maximum absolu de 1 atteint en $x = 0$ (cf. courbe ci-dessous).

2°. x $\arctan(x)$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

La fonction est paire ;
$f'(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$
$f'(x) > 0$ si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si $x < 0$. Elle est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$. Elle est par ailleurs convexe sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \dfrac{\pi}{2}$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \dfrac{\pi}{2}x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\arctan x - \pi/2)$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} (\arctan x - \pi/2)/(1/x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)(-1/x^2)}$
$= -1$ en utilisant la règle de l'Hospital ou la formule $\arctan x + \arctan(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$.

La droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et par parité de la fonction, la doite $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ est asymptote en $-\infty$. Voir la courbe ci-dessous.

3°. $x\text{argth}(x)$. $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$

La fonction est paire.
$f'(x) = argth(x) + \dfrac{x}{1-x^2} > 0$ si $x > 0$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)^2}$ et f est convexe sur son domaine. La courbe possède deux asymptotes verticales en ± 1

4°. $\text{argth}\dfrac{1}{x}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} > 0 \iff x \in]-1, 1[$
$f''(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2(x+1)^2} > 0 \iff x > 0$ On a deux asymptotes verticales en ± 1 et (Ox) est asymptote horizontale en $\pm\infty$

5°. $\text{argch}\dfrac{1}{x}$. $\mathcal{D}_f =]0, 1]$

La fonction est définie si $\frac{1}{x} > 1$ $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et
$f''(x) =$
$f''(x) > 0 \iff x \in]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}[$ et donc $\sqrt{2}/2$ est l'abscisse d'un point d'inflexion.
On a une asymptote verticale en 0

6°. $x\tanh(x)$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(x)$ est une fonction paire. L'étude ressemble à celle de $x \arctan x$
$f'(x) = th(x) + x(1 - th^2x) > 0$ si $x > 0$
$f''(x) = \dfrac{2}{ch^2x}(1 - xth(x))$ $\alpha = f^{-1}(1)$ est l'abscisse d'un point d'inflexion de la courbe.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0$
$\Delta : y = x$ est asymptote en $+\infty$ et $\Delta' : y = -x$ est asymptote en $-\infty$

7°. $\ln\tanh(x)$. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{ch(x) \times sh(x)} > 0$ si $x < 0$
$f''(x) = -\dfrac{sh^2(x) + ch^2(x)}{(ch(x) + sh(x))^2}$donc f concave
Par ailleurs la courbe a deux asymptotes verticales.

8°. $\arccos\sqrt{x}$. $\mathcal{D}_f = [0, 1]$

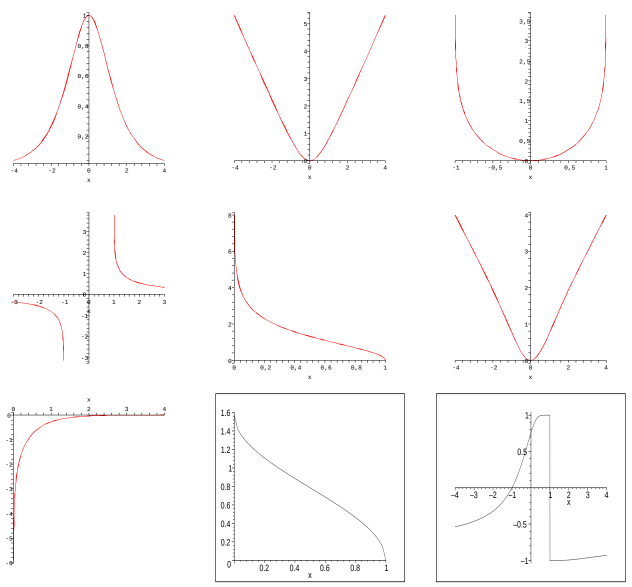
La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ et $\sqrt{.}$ est définie sur $[0, +\infty[$. La fonction existe donc si et seulement si $-1 \leq x \leq 1$ et $x \geq 0$. D'où le domaine de définition.

$f'(x) = \dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ et $f''(x) = \dfrac{-1}{4}\dfrac{-1+2x}{(x(1-x))^{3/2}}$
Sur $[0, 1]$, $x - x^2 = x(1-x)$ est du signe contraire du coefficient de x^2, donc positif. La dérivée est donc toujours négative et la dérivée seconde est du signe de $-1 + 2x$. Or, $-1 + 2x > 0 \iff x > 1/2$. La fonction est décroissante et convexe sur $]0, \frac{1}{2}[$
Il n'y a pas de branches infinies. Cf. la courbe ci-dessous.

9°. $\tanh(\dfrac{1+x}{1-x})$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1\}$

Pour déterminer le domaine de définition, on commence par étudier la fonction $\phi(x) = \frac{1+x}{1-x}$. On a
$\phi'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ et $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}\dfrac{1}{ch^2\phi(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = th(-1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = th(-1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm 1$



10°. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Pour trouver le domaine de définition, on commence par voir que $\dfrac{2x}{1+x^2}$ envoie $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ et $arcsin$ est définie sur $[-1,1]$. $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}sgn(x^2-1)$ et $f''(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}sgn(x^2-1)$. La courbe admet donc 2 points d'inflexion en ± 1. Elle tend vers 0 en l'∞ et possède donc une asymptote horizontale. $f(x)$ est croissante sur $]-1,1[$

11°. $\arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$. $\mathcal{D}_f = [1,+\infty[$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}}$ et $f''(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{3x-2}{x^{7/2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{3/2}}$

f est décroissante et convexe sur son domaine de définition.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

12°. $\cosh(\dfrac{2x-1}{x+1})$. $\mathcal{D}_f =$

$f'(x) = 3\dfrac{sh((2x-1)/(x+1))}{(x+1)^2}$ et on laisse tombre $f''(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^{\pm}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(e^4+1)$ et

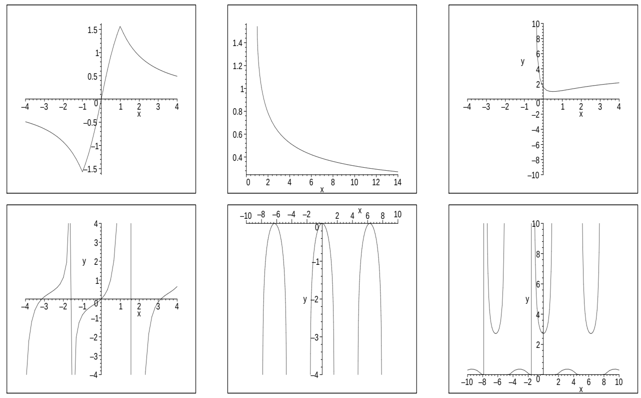
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{-4}+1)$

La courbe possède une asymptote horizontale en $\pm\infty$ et une asymptote verticale en -1

13°. $\dfrac{\tan x}{1-2\sin x}$. $\mathcal{D}_f =$

14°. $\ln\cos x$. $\mathcal{D}_f =$

15°. $e^{1/\cos x}$. $\mathcal{D}_f =$



X

1°. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$f'(x) = -\dfrac{x+1}{(-1+x^2)^{3/2}} > 0 \iff x \in]-\infty,-1[$

$f''(x) = \dfrac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)^{5/2}(x+1)^{5/2}} > 0$ et f est convexe.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et

$\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to} \dfrac{-1}{(x-1)^{3/2}\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{2^{3/2}\sqrt{-x-1}}$
$= +\infty$ attention au signe!!

2°. $\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$

Pour déterminer le domaine de définition, il faut faire un tableau de signe avec la fraction sous le radical. La fonction est définie si l'expression sous le radical est strictement positive. Or, $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ est du signe de $x-1$. L'expression est donc du même signe que $x(x-1)$, c'est à dire positive à l'extérieur de l'intervalle $[0,1[$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x^3+1}{x^2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}$ et

$f'(x) > 0 \iff x^3 > -1/2 \iff \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f'(x) > 0 \iff x \in]\alpha,0[\cup]1,+\infty[$

$f''(x) = -\dfrac{3}{4}\dfrac{4x^4-1}{x^4\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}\right)^{3/2}} > 0 \iff x \in]-\infty,0[$

Attention à faire le calcul de $f'(x)$ et $f''(x)$ soigneusement afin d'éviter les erreurs de calcul. De ce calcul, on en déduit que $f(x)$ est croissante si $x > \alpha$ et convexe sur $]0,1/\sqrt{2}]$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ et

on a deux asymptotes obliques $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = -x$

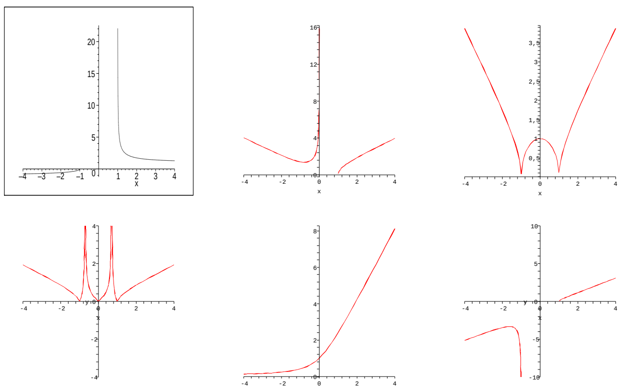
La limite de $f(x)$ en $+\infty$ est facile à voir : la fonction sous le radical est une fraction qui tend vers $+\infty$ avec x. Pour le calcul de la limite de $f(x)/x$, on "rentre" le x sous le radical, il devient un x^2 et la fraction tend vers 1. Enfin, la limite de $f(x)-x$ en l'infini se calcule en multipliant par l'expression conjuguée. La démonstration en $-\infty$ est la même, à ceci prêt qu'un terme (-1) apparaît en tête de l'expression car $-x = |x| = \sqrt{x^2}$ si $x < 0$.

3°. $\sqrt{|x^2-1|}$. $\mathcal{D}_f =$

$4^\circ.\ |\dfrac{x(x^2-1)}{2x^2-1}|\ .\ \mathcal{D}_f =$

$5^\circ.\ x+\sqrt{x^2+1}\ .\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2+1 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Lorsque $x > 0$, cette expression est clairement positive. Maintenant, si $x < 0$, il faut prouver que $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > -1$.
Pour ce faire, on part de l'inégalité $x^2+1 > x^2$. Alors $\sqrt{x^2+1} > -x$ car $x < 0$ et en divisant les deux membres par $\sqrt{\cdot}$, le résultat est prouvé. Ainsi, $f(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
$f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ après calculs. Cette expression est positive sur $\mathbb{R}$. La fonction est donc convexe.
Elle tend vers l'infini en $+\infty$ et $f(x)/x$ tend clairement vers 2. En multipliant par l'expression conjuguée, on voit que $(f(x)-2x)$ tend vers 0 si $x \to +\infty$. La droite d'équation $y = 2x$ est donc asymptote en $+\infty$. La situation est plus facile en $-\infty$ car alors la fonction tend vers 0 (expression conjuguée) de sorte que la courbe admet comme asymptote horizontale l'axe $(0x)$. Cf. avant dernière courbe ci-dessous.

$6^\circ.\ x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\ .\ \mathcal{D}_f =$



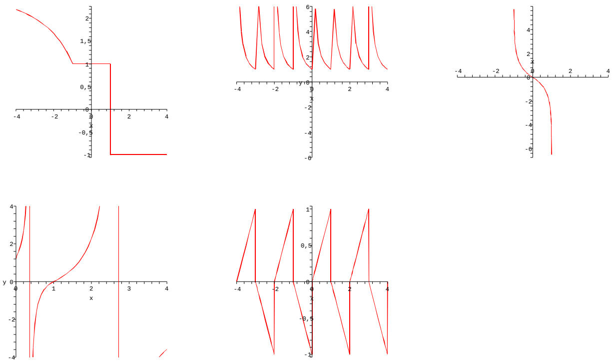
$7^\circ.\ \dfrac{|x+1|-2x}{|x-1|}\ .\ \mathcal{D}_f =$

$8^\circ.\ \dfrac{1}{x-E(x)}\ .\ \mathcal{D}_f =$

$9^\circ.\ \dfrac{|x|}{x}\ln(1-|x|)\ .\ \mathcal{D}_f =$

$10^\circ.\ \dfrac{\ln x}{1-|\ln x|}\ .\ \mathcal{D}_f =$

$11^\circ.\ (-1)^{E(x)}(x-E(x))\ .\ \mathcal{D}_f =$



XI

Soit $f(x) = x - \ln(ch(x))$

$1^\circ.\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $ch\ x \geq 1 > 0$

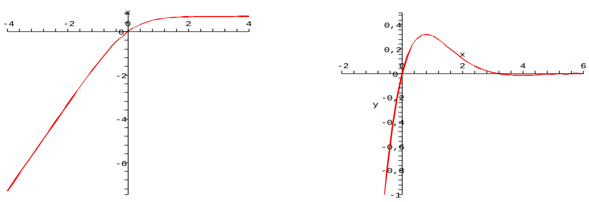
$2^\circ.\ f(x) = x - \ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) =$
$x + \ln 2 - \ln(e^x(1+e^{-2x})) = \ln 2 - \ln(1+e^{-2x})$

$3^\circ.\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ en utilisant la règle de l'Hôpital.
$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln 2 - 2x - \ln(1+e^{-2x})\right)$
Mais $2x + \ln(1+e^{-2x}) \sim e^{2x}$ en $-\infty$ car
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\ln(1+e^{-2x})}{e^{2x}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+2e^{-2x}-2e^{-2x}}{2e^{2x}(1+e^{-2x})}$
$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{2x}+1} = 1$ d'après la règle de l'Hôpital
Ainsi, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \ln 2$ et $\Delta : y = 2x + \ln 2$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$

$4^\circ.$ Etudier f

$f'(x) = 1 - th(x) \geq 0$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{ch^2 x} \leq 0$. La fonction est donc concave et croissante.
$f(x) = 0 \iff x = 0$ La courbe est ci-dessous à gauche.

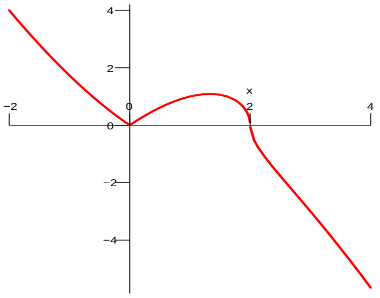


XII

$1^\circ.$ Etudier la fonction $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

Cette fonction est, à l'instar de $\sqrt[3]{x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \dfrac{x(4-3x)}{3(2x^2-x^3)^{2/3}} > 0$ ssi $x \in]0, 4/3[$

$f''(x) = \dfrac{8}{9(x-2)(-x^2(-2+x))^{2/3}} < 0$ ssi $x < 2$
f est donc concave sur $]-\infty, 2]$, convexe sur $[2, +\infty[$ et $(2, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe.
$f(x)/x \to= -1$ en $\pm\infty$ et $\lim_{\pm\infty}(f(x)+x = 2/3$ (après calculs et application de la règle de l'Hospital). Donc $\Delta : y = -x + 2/3$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.
La fonction atteint son maximum en $x = 4/3$ et ce maximum vaut $\alpha = \frac{2}{3}2^{2/3}$



2°. Etudier la fonction $g(x) = \exp\left(x\ln(1-\frac{1}{x})\right)$

A vous de l'étudier !

XIII

Soit $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ et $C(x) = 1 - H(x)$

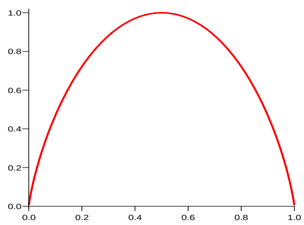
1°. Etudier $H(x)$.

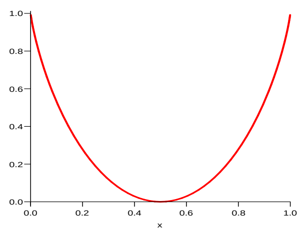
$H(x)$ existe ssi $x > 0$ et $1 - x < 0$, ie $\mathcal{D} =]0, 1[$. On a $H'(x) = \log_2(1/x - 1)$ qui est positif ssi $1/x - 1 > 1$ ie $x < 1/2$ (attention aux sens des inégalités). La fonction est donc croissante sur $]0, 1/2[$ et décroissante sur $]1/2, 1[$ $H''(x) = \dfrac{-1}{x(1-x)\ln 2}$. Or, $\ln 2 > 0$, $x > 0$, $1 - x > 0$ donc H est concave sur son domaine de définition. Enfin, $\lim\limits_{0^+} H'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{0^-} H'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{1^+} H(x) = 0$ et $\lim\limits_{1^-} H(x) = 0$

2°. En déduire l'étude complète de $C(x)$.

$H(x)$ s'appelle fonction d'entropie binaire et est très utilisée en théorie de l'information. $C(x)$ s'appelle la capacité de communication du canal binaire symétrique. Nous en reparlerons l'année prochaine.

Il est inutile de refaire l'étude de cette fonction : $0 < H(x) \leq 1 \iff 0 \leq C(x) < 1$ et $C(x)$ est décroissante quand $H(x)$ est croissante. Par ailleurs, comme $H(x)$ est concave, alors $C(x)$ est convexe.





On gardera l'étude de ces courbes en mémoire pour l'année prochaine. Elles nous seront utiles en théorie de l'information.

XIV

On pose $f(x) = -\ln(\tanh\frac{x}{2})$ que l'on va étudier sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1°. Effectuer l'étude complète de $f(x)$.

$x > 0 \Rightarrow \tanh x > 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
$f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2\cosh(x/2)\sinh(x/2)} < 0$ si $x > 0$: f est décroissante.

$f''(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{.}{(..)^2} > 0$ et donc f est convexe.

2°. Montrer que f est bijective sur I et que $f = f^{-1}$

f est bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même.
$y = -\ln(\tanh(x/2)) \iff y = \ln(\dfrac{e^x+1}{e^x-1})$
$\iff e^y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1} \iff e^x = \dfrac{e^y+1}{e^y-1}$
$\iff x = f(y)$. Ainsi, $f = f^{-1}$

Cette fonction est utilisée dans l'algorithme de décodage itératif de cetains turbo-codes.

XV

1°. Etudier la fonction $f(x)$ ci dessus sur $[-\pi, +\infty[$.

$f'(x) = (\cos x \sin x)e^{-x}$ et $f'(x) > 0 \iff \cos x > \sin x$
$\iff x \in [2k\pi - 3\pi/4; \pi/4 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

2°. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \iff x = k\pi$

3°. Soit $g(x) = e^{-x}$. Déterminer les points de contact entre la courbe de f et celle de g.

$\sin x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq e^{-x}$ et
$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi$ La courbe est ci-dessus à droite.

XVI

Commençons par remarquer que
$a^x = x^a \iff \exp(x\ln a) = \exp(a\ln x)$
$\iff x\ln a = a\ln x$
car exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi, résoudre l'équation est équivalent à résoudre $h(x) = 0$

1°. Si a=e

$h(x) = x - e\ln x$. On a $h'(x) = 1 - e/x \iff x > e$. Comme h est continue, il existe un unique x annulant h ie $x = e$

2°. Si a=2, montrer que l'équation a deux solutions.

$h(x) = x\ln 2 - 2\ln x$. On a $h'(x) = \ln 2 - 2/x > 0$ si $x > 2/\ln 2$ et $h(\dfrac{2}{\ln 2}) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 < 0$
Il existe donc deux solutions à l'équation.

3°. Si 0<a<1,

$h'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > 0$ si $x < \dfrac{a}{\ln a}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la solution est unique ; c'est donc a

4°. Si a>1,

En ce cas, $h'(x) = 0 \iff x = \frac{a}{\ln a} > 0$
On a
$h(\dfrac{a}{\ln a}) = \dfrac{a}{\ln a}\ln a - a\ln(\dfrac{a}{\ln a}) = a(1 - \ln(\dfrac{a}{\ln a})) < 0$
Cette valeur est négative si et seulement si $\phi(x) = \ln(\dfrac{x}{\ln x}) > 1\ \forall x$.
Or, sur $]1, +\infty[$, cette fonction a un minimum absolu de 1 en e. Il existe donc 2 solutions.

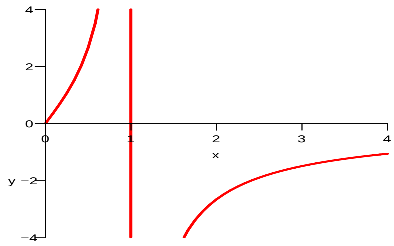
Fonctions de transfert et applications à l'électronique

XVII

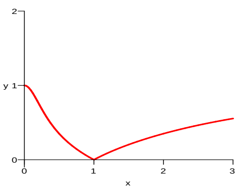
Un montage a pour fonction de transfert $T = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ avec $Z_1 = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{C\omega i})$ et $Z_2 = \dfrac{2R}{1 - ix}\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ où $x = RC\omega$.

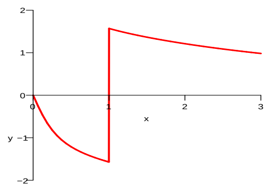
1°. $Z_1 = \dfrac{R}{2}(1 - \dfrac{i}{x})$ et $\dfrac{1}{T} = 1 + \dfrac{Z_2}{Z_1} = 1 + \dfrac{4ix}{1 - x^2}$

2°. $f(x) = \dfrac{4x}{1 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4(1 - x^2) + 8x^2}{(1 - x^2)^2}$
$f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $f(x)$ parcourt $\mathbb{R}$ tout entier. $if(x)$ parcourt donc (Oy) tout entier. $1 + if(x)$ parcourt la droite $\Delta : x = 1$. M d'affixe T parcourt $\mathcal{C}$ de diamètre $[OH]$ avec $H(1, 0)$, O et H étant exclus.



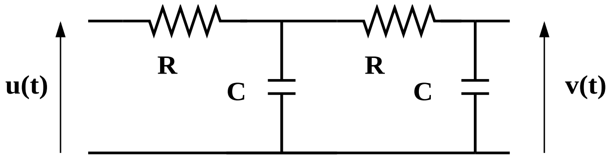
3°. $|T(x)|^2 = \dfrac{1}{1 + f(x)^2} \Rightarrow |T(x)| = (1 + f(x)^2)^{-1/2}$
$|T(x)|' = -f(x)f'(x)(1 + f(x)^2)^{-3/2}$ ainsi $|T(x)|$ est décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$
$\phi(x) = arg(T(x)) = -\arctan f(x)$ vérifie $\phi'(x) < 0$, $\phi(0) = 0$ et $\phi(x) \to 0$ en $+\infty$
Par ailleurs $\phi(x)$ tend vers $\pm\pi/2$ quand x tend vers $1^{\pm}$.
Les deux courbes ci-dessous donnent successivement $|T(x)|$ et $\phi(x)$





XVIII

On considère la double cellule RC montée en cascade ci-dessous :



La cellule est alimentée en entrée par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega > 0$.
On note $G(\omega) = |H(i\omega)|$ le gain du filtre et $\phi(\omega) = arg(H(i\omega))$.

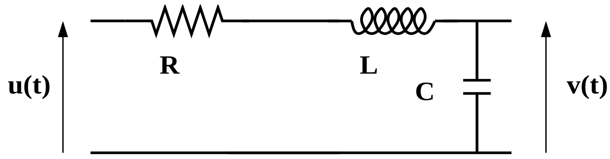
1°. Montrer que la fonction de transfert du filtre est $H(i\omega) = \dfrac{1}{RCi\omega + (1 + RCi\omega)^2}$

2°. Montrer que $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - (RC\omega)^2) + (3RC\omega)^2}}$ et $\phi(\omega) = -\arctan \dfrac{3RC}{1 - (RC\omega)^2}$.

3°. Si RC=1, étudier les fonctions $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sur $]0, +\infty[$

XIX

Considérons le circuit RLC ci-dessous, dans lequel la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur.



On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ qui est la pulsation propre du circuit et $m = \dfrac{RC\omega_0}{2} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ qui s'appelle le facteur d'amortissement.

1°. Montrer que la fonction de transfert en régime sinusoïdal est $T(i\omega) = \dfrac{1}{1 + RCi\omega - LC\omega^2}$

On applique le cours :

$$T(i\omega) = \frac{\frac{1}{iC\omega}}{R + iL\omega + \frac{1}{iC\omega}} = \frac{1}{1 + RCi\omega + LC(i\omega)^2}$$

2°. Exprimer $T(i\omega)$ en fonction de ω_0 et m. Montrer que le dénominateur de $T(i\omega)$ ne s'annule pas si $m < 1$. Dans toute la suite de l'exercice, on se placera dans ce cas.

$T(i\omega) = \dfrac{1}{1 + 2im\omega/\omega_0 + (i\omega/\omega_0)^2}$

Le dénominateur est une expression du second degré en ω. Le discriminant vaut $4(m^2 - 1)$ qui est négatif si $m < 1$.

3°. Montrer que le gain en module du système est $G(\omega) = 20\log|T(i\omega)| = -10\log\left((1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

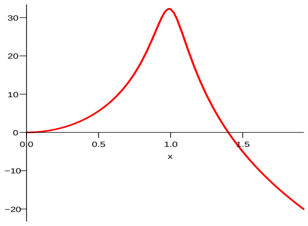
Il suffit de faire le calcul !

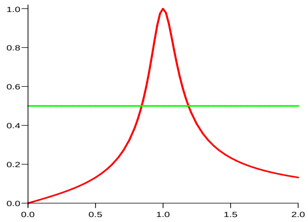
4°. Calculer $G'(\omega)$ et montrer que cette expression s'annule ssi $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$ (on pourra poser $x = \omega/\omega_0$)

Posons $x = i\omega/\omega_0$. On a alors
$G(x) = -10\log\left((1 - x^2)^2 + 4m^2x^2\right)$
$G'(x) = -10\dfrac{-4x(1 - x^2) + 8m^2x}{(1 - x^2)^2 + 4m^2x^2} = 0 \iff x = \sqrt{1 - 2m^2}$
ou $x = 0$ (si $1 - 2m^2 > 0$)

5°. Montrer que si $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, la fonction admet un maximum que l'on calculera. Déterminer le tableau de variations puis la courbe de $G(\omega)$. De quel type de filtre s'agit-il ?

La question précédente montre que $G'(x)$ s'annule si $m < \sqrt{2}/2$. Par ailleurs, sur l'intervalle $[0, \omega_0\sqrt{1-2m^2}]$, $G(x)$ est croissante de 0 à $-20\log(2m\sqrt{1-m^2})$ qui est le maximum de la fonction et sur l'intervalle $[\omega_0\sqrt{1-2m^2}, +\infty[$, $G(x)$ décroit du maximum vers $-\infty$. La valeur $M = -20\log(2m\sqrt{1-m^2})$ est donc bien un maximum absolu pour $G(x)$.
Il s'agit d'un filtre passe-bas (du second ordre puisque le dénominateur est un polynôme de degré 2).





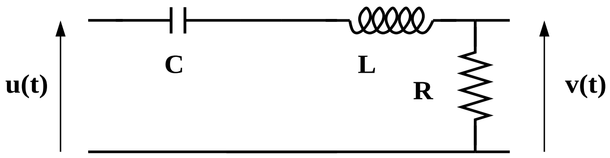
Il s'agit d'un filtre passe-bande.

5°. On définit la bande passante de ce filtre comme étant l'ensemble des valeurs de ω telles que
$G(\omega) > \frac{1}{\sqrt{2}} \max_\omega G(\omega)$
Montrer que cette bande passante est un intervalle de la forme $[\omega_1, \omega_2]$ de largeur $2m\omega_0$

Ces valeurs sont solutions de $1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0\omega)^2 = 2$, ie
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{1/Q^2+4}$ et $\omega_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{1/Q^2+4}$
On vérifie alors que $B = \omega_2 - \omega_1 = 2m\omega_0$

XX

Considérons le circuit RLC ci-dessous, dans lequel la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance. On utilise les mêmes notations que dans l'exercice précédent.



1°. Montrer que la fonction de transfert du filtre est
$T(i\omega) = \frac{2mi\omega/\omega_0}{1 + 2mi\omega/\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2}$
C'est une application directe du cours !

2°. Montrer que le gain en module du système (sans notation logarithmique) est

$$G(\omega) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $2mi\omega/\omega_0$, il vient $T(i\omega) = \frac{1}{1 + (2mi\omega/\omega_0)^{-1} + i\omega/(2m\omega_0)}$
$= \frac{1}{1 + \frac{i}{2m}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ d'où le résultat.

3°. On pose $Q = \frac{1}{2m}$ qui s'appelle le facteur de qualité du circuit. Exprimer $G(\omega)$ en fonction de Q.

$G(\omega) = \left(1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2\right)^{-1/2}$

4°. Etudier la courbe $G(\omega)$. De quel type de filtre s'agit-il ?