I Fonction indicatrice

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction indicatrice de A et l'on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

1°. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. On note $\bar{A}$ le complémentaire de l'ensemble A. Démontrer que :

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} \quad \mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \quad \mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$$

2°. On note $H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ la fonction de Heaviside ; il s'agit de l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$
Les physiciens l'appellent aussi fonction échelon ou fonction unité. Tracer la courbe représentative de $H(x)$ et étudier la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Tracer $H(x) + H(x-1)$ ainsi que $H(x+1)$.

3°. On pose $\Pi(x) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$.
Tracer la courbe représentative de $\Pi(x)$ et expliquer pourquoi on l'appelle fonction porte.
Tracer de même $\Pi(2x)$, $3\Pi(x)$ et $\Pi(x-1)$. Etant donné x_0, L, ϵ, tracer la courbe de $\epsilon \times \Pi(\dfrac{x-x_0}{L})$

4°. Etant donné une fonction $f(x)$ quelconque dont on se donne la courbe, tracer la courbe de la fonction $f(x) \times \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ et expliquer pourquoi la multiplication par une indicatrice s'appelle un fenêtrage.

5°. Soit $\Delta(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Tracer la courbe représentative de $\Delta(x)$

6°. Soit $f(x) = t \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Tracer la courbe de $f(2x)$, $2f(x)$, $f(-x)$, $f(x-1)$, $f(x-1) + f(1-x)$ et $f(\dfrac{x}{2})$.

II Transformations sur les signaux

Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = e^{-x}$.

1°. Déterminer les courbes représentatives des signaux ci-dessous :

$$f(2\pi x) \quad f(\frac{x}{2}) \quad 2 \times f(x) \quad f(x) \times H(x) \quad f(x - \pi/2) \quad f(x-\pi/2) \times H(x-\pi/2) \quad |f(x)| \quad f(x) \times \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$$

2°. Déterminer et tracer la courbe de la fonction $p(x)$ paire, égale à $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer et tracer la courbe de la fonction $i(x)$ impaire, égale à $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Tracer la courbe de la fonction périodique de période 1 égale à $g(x)$ sur $[0, 1[$.
Etudier la continuité des trois fonctions ci-dessus.

III Continuité

1°. Considérons la fonction $f(x) = x \sin(\dfrac{1}{x})$
Déterminer son domaine de définition et étudier sa continuité sur ce domaine. Est-elle prolongeable par continuité ? Est-elle dérivable ?

2°. Considérons la fonction sinus cardinal $\mathrm{sc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
Déterminer son domaine de définition et étudier continuité et dérivabilité sur ce domaine. Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative.

IV Partie entière

Soit $E(x)$ la fonction partie entière.

1°. Rappeler la définition de $E(x)$.

2°. Etudier les fonctions $E(x^2)$, $x - E(x)$, $xE(x)$ et $\dfrac{E(x)}{x}$

3°. Etudier la continuité de ces fonctions.

V Fonctions réciproques

1°. Déterminer les intervalles sur lesquelles les fonctions ci-dessous sont bijectives et exprimer leur réciproque ;

$$f(x) = \ln(1+2x) \quad g(x) = e^{-x^2} \quad h(x) = \sin(x^2) \quad s(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

2°. Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et étudier f. Calculer $f \circ f$ et en déduire f^{-1}.

VI Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

1°. $\dfrac{3x+1}{x-2}$ 2°. $\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+x+1}$ 3°. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 4°. $e^{\frac{1}{x}}$ 5°. $e^{\sin(x^2)}$ 6°. $\dfrac{3\ln x+1}{\ln x-2}$ 7°. $e^{\frac{1}{x}}\ln x$ 8°. $(1+\dfrac{1}{x})^x$

VII Etude de polynômes et fractions rationnelles

1°. x^3-3x+1 2°. $x+\dfrac{1}{x}$ 3°. $(\dfrac{x+1}{x-1})^2$ 4°. $\dfrac{x^2+2x-4}{x-1}$ 5°. $\dfrac{x^3}{x^2-4x+5}$ 6°. $\dfrac{2x^2+3x}{x+2}$
7°. $\dfrac{1}{x^2+1}$ 8°. $\dfrac{x^4}{x^3-3x+2}$ 9°. $\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}$ 10°. $\dfrac{x}{1+x^3}$ 11°. $\dfrac{x^5}{x^4-1}$

VIII Etude de fonctions logarithmes et puissances

1°. $x\ln x$ 2°. $\dfrac{\ln x}{x}$ 3°. $\dfrac{1}{\ln x}$ 4°. $\dfrac{x}{\ln x}$ 5°. x^x 6°. $x^{\frac{1}{x}}$
7°. $xe^{\frac{1}{x}}$ 8°. e^{-x^2} 9°. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 10°. $\ln(x-\ln x)$ 11°. $\dfrac{-2}{\ln x-1}$ 12°. $\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$
13°. $xe^{\frac{x}{x^2-1}}$ 14°. $(x^2+1)e^{-x}$ 15°. $\dfrac{e\ln x-x}{x^2}$ 16°. $\ln(\sqrt{x}+1)$ 17°. $e^{\frac{1+x}{1-x}}$ 18°. $\log_x(2)+(\ln 2x)^2$

IX Etude de fonctions trigonométriques et hyperboliques

1°. $\dfrac{1}{\cosh x}$ 2°. $x\ \arctan(x)$ 3°. $x\ \mathrm{argth}(x)$ 4°. $\mathrm{argth}\dfrac{1}{x}$ 5°. $\mathrm{argch}\dfrac{1}{x}$ 6°. $x\tanh(x)$
7°. $\ln\tanh(x)$ 8°. $\arccos\sqrt{x}$ 9°. $\tanh(\dfrac{1+x}{1-x})$ 10°. $\arcsin(\dfrac{2x}{1+x^2})$ 11°. $\arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$ 12°. $\cosh(\dfrac{2x-1}{x+1})$
13°. $\dfrac{\tan x}{1-2\sin x}$ 14°. $\ln\cos x$ 15°. $e^{1/\cos x}$

X Etude de fonctions avec radicaux et valeurs absolues

1°. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 2°. $\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$ 3°. $\sqrt{|x^2-1|}$ 4°. $|\dfrac{x(x^2-1)}{2x^2-1}|$ 5°. $x+\sqrt{x^2+1}$ 6°. $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
7°. $\dfrac{|x+1|-2x}{|x-1|}$ 8°. $\dfrac{1}{x-E(x)}$ 9°°. $\dfrac{|x|}{x}\ln(1-|x|)$ 10°. $\dfrac{\ln x}{1-|\ln x|}$ 11°. $(-1)^{E(x)}(x-E(x))$

XI BE 2003

Soit $f(x) = x - \ln(\cosh x)$

1°. Déterminer $\mathcal{D}_f$
2°. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln 2 - \ln(1+e^{-2x})$
3°. Montrer que $2x + \ln(1+e^{-2x}) \overset{-\infty}{\sim} e^{2x}$
En déduire les branches infinies de la fonction.
4°. Etudier f

XII BE 2004 et 2006

1°. Etudier la fonction $f(x) = \sqrt[3]{2x^2-x^3}$
2°. Etudier la fonction $g(x) = \exp\left(x\ln(1-\dfrac{1}{x})\right)$

XIII Fonction d'entropie binaire

Soit $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ et $C(x) = 1 - H(x)$

1°. Etudier $H(x)$.
2°. En déduire l'étude complète de $C(x)$.

$H(x)$ s'appelle fonction d'entropie binaire et est très utilisée en théorie de l'information. $C(x)$ s'appelle la capacité de communication du canal binaire symétrique. Nous en reparlerons l'année prochaine.

XIV Etude de $-\ln(\tanh\frac{x}{2})$

On pose $f(x) = -\ln(\tanh\frac{x}{2})$ que l'on va étudier sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1°. Effectuer l'étude complète de $f(x)$.
2°. Montrer que f est bijective sur I et que $f = f^{-1}$

XV. Etude de $e^{-x}sin(x)$

1°. Etudier la fonction $f(x)$ ci dessus sur $[-\pi, +\infty[$.
2°. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
3°. Soit $g(x) = e^{-x}$. Déterminer les points de contact entre la courbe de f et celle de g.

XV Résolution de $a^x = x^a$

Notons $f(x) = x^a$, $g(x) = a^x$ et $h(x) = x\ln a - a\ln x$ pour $a > 0$.
En étudiant h, répondre aux questions ci dessous :
1°. Si a=e, résoudre l'équation et démontrer que $\frac{x}{\ln x} \geq e \ \forall x > 1$
2°. Si a=2, montrer que l'équation a deux solutions.
3°. Si 0<a<1, montrer que l'équation a une unique solution et la déterminer.
4°. Si a>1 et $a \neq e$, montrer que h admet un minimum strictement négatif.
En déduire que l'équation a deux solutions a et b.Montrer que $b > 1$ et que $b < a \iff a > e$

Fonctions de transfert et applications à l'électronique

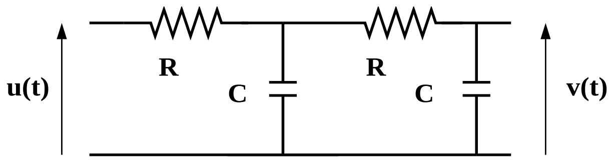
XVI

Un montage a pour fonction de transfert $T = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ avec $Z_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{C\omega i})$ et $Z_2 = \frac{2R}{1 - ix}\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ où $x = RC\omega$.

1°. Exprimer Z_1 en fonction de R et x puis calculer $\frac{1}{T}$ en fonction de x. En déduire l'expression de T en fonction de x.
2°. Etudier $f(x) = \frac{4x}{1 - x^2}$ pour $x \in]0, +\infty[$ et en déduire le parcours dans le plan complexe du point M d'affixe T.
3°. Etudier les fonctions numériques $G(x) = |T(x)|$ et $\phi(x) = arg(T(x))$.

XVII

On considère la double cellule RC montée en cascade ci-dessous :



La cellule est alimentée en entrée par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega > 0$.
On note $G(\omega) = |H(i\omega)|$ le gain du filtre et $\phi(\omega) = arg(H(i\omega))$.

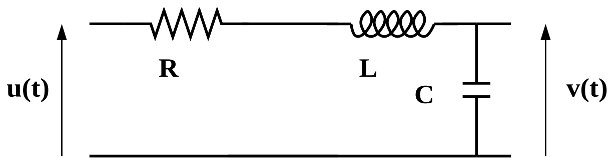
1°. Montrer que la fonction de transfert du filtre est $H(i\omega) = \frac{1}{RCi\omega + (1 + RCi\omega)^2}$

2°. Montrer que $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (RC\omega)^2) + (3RC\omega)^2}}$ et $\phi(\omega) = -\arctan\frac{3RC}{1 - (RC\omega)^2}$.

3°. Si RC=1, étudier les fonctions $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sur $]0, +\infty[$

XVIII

Considérons le circuit RLC ci-dessous, dans lequel la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur.



On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ qui est la pulsation propre du circuit et $m = \dfrac{RC\omega_0}{2} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ qui s'appelle le facteur d'amortissement.

1°. Montrer que la fonction de transfert en régime sinusoïdal est $T(i\omega) = \dfrac{1}{1 + RCi\omega - LC\omega^2}$

2°. Exprimer $T(i\omega)$ en fonction de ω_0 et m. Montrer que le dénominateur de $T(i\omega)$ ne s'annule pas si $m < 1$. Dans toute la suite de l'exercice, on se placera dans ce cas.

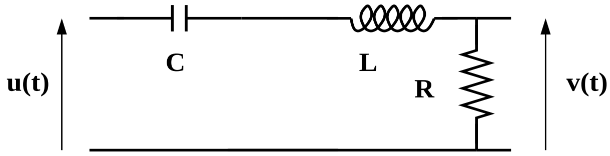
3°. Montrer que le gain en module du système est $G(\omega) = 20\log|T(i\omega)| = -10\log\left((1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

4°. Calculer $G'(\omega)$ et montrer que cette expression s'annule ssi $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ (on pourra poser $x = \omega/\omega_0$)

5°. Montrer que si $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, la fonction admet un maximum que l'on calculera. Déterminer le tableau de variations puis la courbe de $G(\omega)$. De quel type de filtre s'agit-il ?

XIX

Considérons le circuit RLC ci-dessous, dans lequel la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance. On utilise les mêmes notations que dans l'exercice précédent.



1°. Montrer que la fonction de transfert du filtre est $T(i\omega) = \dfrac{2mi\omega/\omega_0}{1 + 2mi\omega/\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2}$

2°. Montrer que le gain en module du système (sans notation logarithmique) est

$$G(\omega) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

3°. On pose $Q = \dfrac{1}{2m}$ qui s'appelle le facteur de qualité du circuit. Exprimer $G(\omega)$ en fonction de Q.
4°. Etudier la courbe $G(\omega)$. De quel type de filtre s'agit-il ?
5°. On définit la bande passante de ce filtre comme étant l'ensemble des valeurs de ω telles que $G(\omega) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}\max_\omega G(\omega)$
Montrer que cette bande passante est un intervalle de la forme $[\omega_1, \omega_2]$ de largeur $2m\omega_0$