MATHEMATIQUES TD N°1 : ESPACES VECTORIELS - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2009/2010

I

Dans $\mathbb{R}^2$muni de la base (i,j) on considère l'application linéaire u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. $u(i)$ est la première colonne de A cad
$u(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i$
$u(j)$ est la seconde colonne de A cad
$u(j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = i + j$

$u(i+j) = u(i) + u(j) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ker u = \{X(x,y)/u(X) = 0\}$ avec

$u(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = 0$
$\iff x + y = 0, x = 0 \iff \ker u = \{0\}$

$Im(u) = \{u(x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix};$
$x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$u(2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u^2(2,1) = u \circ u(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2°. à 5°. A vous de chercher.

II

Dans $\mathbb{R}^2$muni de la base (i,j), on considère l'application linéaire u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1°. $u(i)$ est la première colonne de A cad $u(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u(j)$ est la seconde colonne de A cad $u(j) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u(i+j) = u(i) + u(j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(i-j) = u(i) - u(j) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2°. $\ker u = \{X(x,y)/AX = 0\}$ avec

• $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} = 0$

$\iff x = y \iff \ker u = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}\}$

$Im(u) = \{u(x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix};$
$x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$
C'est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est donnée, par exemple, par le vecteur $(1,1)$

•
$\ker(u - 2Id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ -x-y \end{pmatrix} = 0$

$\iff x = -y \iff \ker(u - 2Id) = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}\}$
C'est un espace vectoriel de dimension 1 et base $(1,-1)$

3°. $u(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u(b) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ainsi, $u(a) = 0.a$ et $u(b) = 2b$. La matrice dans la base (a,b) est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

III

2°. $u(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u(j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u(i+j+k) = 0$

$$AX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y+z \\ -2x+y+z \\ -2x-y+3z \end{pmatrix} = 0$$

$\iff x = y = z \iff \ker u = \{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}\}$ qui est un espace vectoriel de dimension 1 et base $(1,1,1)$

$u(X) = X \iff (u - Id)(X) = 0 \iff F = \ker(u - Id)$

et après calculs, $F = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 2x + y - z = 0\}$ Il s'agit de l'équation d'un plan donc d'un espace vectoriel de dimension 2. Une base est donnée par le couple $\{(1,0,2); (0,1,1)\}$

1°, 3°, 4° et 5° : A vous de chercher.

IV

1°. $\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ et est antisymétrique.

2°. $M^2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^3 = -M$

3°. $u(a,b,c), v(0,-c,b), w(1-a^2, -ab, -ac)$ $f(u) = 0$ et les vecteurs (u,v,w) sont libres car le déterminant de la matrice colonne a un déterminant $b^2 + c^2$ non nul

4°. $f(u) = 0$, $f(v) = -w$, $f(w) = v$ et la matrice de u dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

V

1°. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = O$

$\ker A = \{X(x,y,z)/ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = 0\}$

$\iff y = z = 0 \iff \ker A = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}\}$

C'est un espace vectoriel de dimension 1 et base $(1,0,0)$

$ImA = \{\begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}; y, z \in \mathbb{R}\}$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 et base $\{(0,1,0); (0,0,1)\}$

2°.

$\ker A^2 = \{X(x,y,z)/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\}$

$\iff z = 0 \iff \ker A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}\}$

C'est un espace vectoriel de dimension 2 et base (i, j)

$ImA^2 = \{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R}\}$ qui est un espace vectoriel de dimension 1 et base $(1, 0, 0)$

3°. NON ! car c'est une matrice nilpotente et $\det A = 0$

VI

Soit $\mathbb{R}_n[X] = \{P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefs dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

1°. Il faut vérifier tous les axiomes définissant les espaces vectoriels. Autre façon : savoir que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et que $\mathbb{R}_n[X]$ en est un sous espace vectoriel : 0 est dans cet ensemble qui n'est donc pas vide. Par ailleurs, la somme de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ et le produit d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ par un réel appartient également à $\mathbb{R}_n[X]$

2°. Considérons une combinaison linéaire $Q = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_n P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ de ces éléments. On sait qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc $Q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. La famille est donc libre.

3°. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire des P_k : la famille est donc libre et génératrice ; c'est une base de l'espace vectoriel. Ainsi, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Les coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans cette base sont ses coefficients $a_0, ..., a_n$

La dérivation étant une opération linéaire, d est linéaire. Sa matrice est formée des colonnes $d(P_0)$, ..., $d(P_n)$, et puisque $d(x^k) = kx^{k-1}$, on a

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

5°. $\ker d = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/ \ P' = 0\}$ est l'ensemble des polynômes constants. C'est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par le polynôme constant 1. D'après le théorème du noyau image, $\dim Im(d) = n$ et $Im(d)$ est donc égale à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

6°. $\delta_\alpha(P_0) = 1$ et $\delta_\alpha(P_k) = \alpha^k \Rightarrow M_{\delta_\alpha} = [1, \alpha, ..., \alpha^n]$
$\ker \delta_\alpha = \{P/ \ P(\alpha) = 0\}$ est donc l'ensemble des polynômes dont α est racine. C'est un espace vectoriel de dimension n. L'image de cette application est l'ensemble des réels et est de dimension 1.

VII

Considérons l'application $\begin{array}{rccl} \tau : & M_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & \tau(M) = {}^tM \end{array}$

1°. La transposition est linéaire par construction !

2°. $M_2(\mathbb{R})$ a pour dimension 4 et pour base la famille formée des quatre matrices
$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$
$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice de τ se calcule donc en explicitant $\tau(A_{11}) = A_{11}$, $\tau(A_{12}) = A_{21}$, $\tau(A_{21}) = A_{12}$ et $\tau(A_{22}) = A_{22}$. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3°. Déterminer $\ker \tau = \{M/ \ {}^tM = 0\} = \{0\}$ et $Im(\tau) = M_2(\mathbb{R})$

VIII

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 muni de sa base canonique $1, x, x^2$.
Considérons l'application
$\begin{array}{rccl} u : & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ & P & \mapsto & u(P) = \int_x^{x+1} P(t)dt \end{array}$

1°. u est linéaire car l'intégration est linéaire.
$u(1) = \int_x^{x+1} dt = 1$, $u(x) = \int_x^{x+1} tdt = x + 1/2$,
$u(x^2) = \int_x^{x+1} t^2 dt = x^2 + x + 1/3$
$\Rightarrow M_u = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°. $\det M = 1 \Rightarrow M$ inversible.

3°. Soit $Q(x) = 6x^2 + 4x + 5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ Alors

$M_u P = Q \Rightarrow P = M_u^{-1} Q$

IX

Notons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On travaillera dans la base $\{x^2, x, 1\}$ de cet espace.

On considère une application $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme $P = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $u(P) = bx^2 + cx + a$.

1°. Démontrer que u est linéaire et déterminer sa matrice M dans la base $\{x^2, x, 1\}$.

le polynôme image $u(P)$ a des coordonnées qui sont combinaisons linéaires des coefficients du polynôme P et par conséquent u est linéaire.

Pour déterminer la matrice, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $u(x^2) = 1$, $u(x) = x^2$ et $u(1) = x$ et de les exprimer dans la base $(x^2, x, 1)$. Il vient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°. Calculer M^2 et M^3. Expliquer la forme de M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

M^3 est égale à la matrice identité car l'application effectue une permutation circulaire des coefficients. Après deux permutations, on retrouve le polynôme initial.

3°. Déterminer $\ker u$ et Im u en présisant une base et la dimension.

$\vec{X} \in \ker u \iff A\vec{X} = \vec{0} \iff a = b = c = 0$
Il s'agit donc d'un espace de dimension 0

De même, $\text{Im}(A) = \{(b, c, a); a, b, c \in \mathbb{R}\}$
qui est un espace de dimension 3 et de base $\{x^2, x, 1\}$
On trouve immédiatement le résultat en appliquant le théorème du noyau-image.

4°. $\det M = 1$ et $M^{-1} = M^2$ puisque $M^3 = M \times M^2 = I$

X

1°. Par construction, la somme de deux fonctions du type $\alpha e^x + \beta e^x + \gamma$ est encore de cette forme (il suffit d'ajouter les coefficients) et le produit d'une telle fonction par un nombre réel est encore de la même forme. Par ailleurs, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide puisque la fonction constante 1 y est (e^x et e^{-x} y sont aussi). C'est donc un espace vectoriel réel, sous-espace de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que toute fonction de $\mathcal{E}$ est combinaison linéaire des trois fonctions e^x, e^{-x} et 1. Ces fonctions sont linéairement indépendantes car, par exemple, $\alpha e^x + \beta e^x + \gamma = 0\ \forall x$ entraine $\alpha + \beta + \gamma = 0$ en faisant $x = 0$. En dérivant une fois, puis deux fois et en posant $x = 0$, on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc il s'agit d'une base de $\mathcal{E}$ et $\dim \mathcal{E} = 3$.

2°. $ch\ x = (e^x + e^{-x})/2$. Les coordonnées de cette fonction dans la base ci-dessus sont donc $(1/2, 1/2, 0)$. Pour $sh\ x$, on a de la même façon $(1/2, -1/2, 0)$.

3°. La dérivation est clairement linéaire ; il en va donc de même de d. La matrice de d a pour colonnes les coordonnées des images des "vecteurs" de base : $d(e^x) = e^x$, $d(e^{-x}) = -e^{-x}$ et $d(1) = 0$. Donc
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Par ailleurs, $d(\cosh x) = \sinh x$ et $d(\sinh x) = \cosh x$

4°. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\det P = -1/2$: cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs forment une base et dans cette base, la matrice de d est $B = P^{-1}DP$ que l'on peut donner directement et sans calcul :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

XI

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = 0$. Nous noterons :
$\mathcal{E} = \{y(t)/\ y''(t) + y(t) = 0\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

Soient y_1 et y_2 deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $y_1 + y_2$ est solution, ainsi que λy_1. Par ailleurs, la fonction constante égale à 0 est dans cet ensemble. C'est donc un espace vectoriel

2°. Démontrer que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

C'est évident car $\sin'' x = -\sin x$ et $\cos'' x = -\cos x$

3°. Démontrer que toute solution de $\mathcal{E}$ est de la forme $\alpha \sin x + \beta \cos x$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En déduire la dimension et une base de $\mathcal{E}$.

L'équation caractéristique de l'équation est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$. D'après le cours sur les équations différentielles, les solutions sont donc des combinaisons linéaires de $\sin x$ et $\cos x$. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et base $\{\sin x, \cos x\}$

XII

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui sont combinaison linéaire de sin et cos. Nous noterons
$\mathcal{E} = \{u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

Cet ensemble est non vide car cos et sin sont dedans. Il est clairement stable par addition et multiplication par une constante, par suite, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions numériques. C'est donc un espace vectoriel. Il est de dimension 2 et une base est donnée, par exemple, par le couple $\{\cos x, \sin x\}$

2°. L'image de $u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ est $d(u)(x) = v(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$. Par ailleurs, la dérivation est une opération linéaire donc d est linéaire.
Sa matrice dans la base canonique est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3°. On voit facilement que $D^2 = -I$ donc que $D^3 = -D$ et que $D^4 = I$; Ainsi, $D^{4n} = I$, $D^{4n+1} = D$, $D^{4n+2} = -I$, $D^{4n+3} = -D$

XIII

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Calculer $(A - I)^2$, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}

$(A - I)^2 = 0$ donc comme A et I commutent, $A^2 - 2A + I = 0 \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I$, ainsi A est inversible et $A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°. Considérons l'application linéaire u qui à un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + (c + a)$. Montrer que u est linéaire et déterminer sa matrice dans la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

C'est évident : $u(P_1 + P_2) = Q_1 + Q_2 = u(P_1) + u(P_2)$ et on vérifie également que $u(\lambda P) = \lambda u(P)$. Sa matrice dans la base donnée est évidemment A (il fallait s'en douter...) car $u(1) = 1$, $u(x) = x$ et $u(x^2) = x^2 + 1$

3°. Quel est l'antécédent par u du polynôme $S(x) = x^2 + x - 1$?

Le vecteur correspondant à S dans la base canonique a pour coord $(-1, 1, 1)$. Pour avoir son antécédent, il suffit d'effectuer le produit $A^{-1} \times S = (-2, 1, 1)$, ie l'antécédent est $x^2 + x - 2$.

XIV

1°. Il suffit, dans chaque cas, de calculer les images par la transformation u des vecteurs i, j, k. Pour $u = S_{(Ox)}$, $u(i) = -i$, $u(j) = j$, $u(k) = k$

$$M_{S_{(Ox)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{S_{(Oy)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{S_{(Oz)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2°. Pour une rotation autour de (Oz), $u(k) = k$ et les vecteurs i et j sont alors transformés selon une rotation plane dans le plan (xOy) d'angle θ. On a :

$$M_{(Oz)} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{(Ox)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

3°. Homothétie de centre O et de rapport k :

$$M_H = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4°. Composer les transformations revient à multiplier les matrices (le produit n'étant pas commutatif, il faut l'effectuer de droite à gauche) : $M = M_H M_{(Ox)} S_{(Oz)}$. Après calculs, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k\cos\phi & k\sin\phi \\ 0 & -k\sin\phi & k\cos\phi \end{pmatrix}$$

XV

1°.

$$\Omega X = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + x_1 + ... + x_{N-1} \\ x_0 + \omega x_1 + ... + \omega^{N-1} x_{N-1} \\ \vdots \\ x_0 + ... + \omega^{(N-1)^2} x_{N-1} \end{pmatrix} = \widehat{X}$$

$\det \Omega = \det V(1, \omega, ..., \omega^{N-1}) = \displaystyle\prod_{i \neq j}^{N-1} (\omega^j - \omega^i) \neq 0$ car les différentes puissances de ω sont toutes distinctes (ce sont les racines nièmes de l'unité). Ω est inversible et par conséquent la transformation est bijective.

2°. $\Omega\bar{\Omega}$ est une matrice à termes complexes. Le coefficient α_{ij} de cette matrice est

$$\sum_{k=1}^{N} \Omega_{ik}\bar{\Omega}_{kj} = \sum_{k=1}^{N} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(1-j)(1-k)}$$

$$\Rightarrow \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \omega^{(k-1)(i-1-1+j)} = \sum_{k=1}^{N} \omega^{(k-1)(i-j)} = \sum_{k=1}^{N} (\omega^{i-j})^{k-1}$$

$$= \frac{1 - \omega^{N(i-j)}}{1 - \omega^{i-j}}$$

Si $i \neq j$, alors $\omega^{i-j} \neq 1$ et en ce cas $\omega^{(N-1)(i-j)} = 1$
Si $\omega^{i-j} = 1$ on a $\alpha_{ij} = N \Rightarrow \Omega\bar{\Omega} = N.Id$
Ainsi, $(\det \Omega\bar{\Omega}) = (\det \Omega)^2 = N \neq 0$ donc Ω est bijective et $\Omega^{-1} = \dfrac{1}{N}\bar{\Omega}$

On constate alors que $\dfrac{1}{N}\bar{\Omega}\widehat{X} = X$ (faire le calcul)

3°. $\widehat{X} = \Omega X \Rightarrow \bar{\widehat{X}} = \bar{\Omega}\bar{X} \Rightarrow^t \bar{\widehat{X}} =^t \bar{X}\bar{\Omega}$
$\Rightarrow^t \bar{\widehat{X}}\widehat{X} =^t \bar{X}\bar{\Omega}\Omega X \Rightarrow ||\widehat{X}||^2 = N||X||^2$

$$\iff \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}_k|^2$$

4°.

$$x \star y(N + n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{N+n+k} x_k y_{N+n+k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k} = x \star y(N)$$

$$\widehat{x \star y}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x \star y(n)\omega^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}\omega^{nk}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_{n-k}\omega^{nk} \right)$$

A vous de finir... Et puis à vous de corriger les derniers exercices aussi.