Matrice d'une application linéaire.

I

Dans $\mathbb{R}^2$muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application linéaire u de matrice A. Pour chacune des matrices A données ci-dessous, déterminer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$ et $u(\vec{i}+\vec{j})$, expliciter $\ker u$, Im u et calculer $u(\vec{a})$ et $u \circ u(\vec{a})$ pour un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(2,1) \in \mathbb{R}^2$.

1°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

II

A partir de maintenant, nous omettrons les flèches sur les vecteurs.
id représente l'application identité qui à un vecteur associe lui-même.
Dans $\mathbb{R}^2$muni de la base (i, j), on considère l'application linéaire u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
1°. Calculer $u(i)$, $u(j)$, $u(i+j)$ et $u(i-j)$. Déterminer la matrice de l'application linéaire $u - 2\text{id}$.
2°. Expliciter $\ker u$ et $\ker(u - 2\text{id})$ en donnant la dimension.
3°. Soient $a(1,1)$ et $b(1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Exprimer i et j en fonction de a et b, puis $u(a)$ et $u(b)$ en fonction de a et b.
4°. En déduire la matrice de u dans la base (a, b), après avoir prouvé que cette dernière est une base de $\mathbb{R}^2$.

III

Dans $\mathbb{R}^3$muni de sa base canonique (i, j, k), on considère l'application linéaire u de matrice A. Pour chacune des matrices ci-dessous, calculer $u(i)$, $u(j)$, $u(k)$, $u(i+j+k)$ et déterminer $\ker u$ et Imu en précisant leur dimension. Déterminer également l'ensemble F des vecteurs X de $\mathbb{R}^3$qui vérifient $u(X) = X$.

1°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2°. $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3°. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

IV

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Dans $\mathbb{R}^3$muni de sa base canonique (i, j, k) on considère l'application linéaire f vérifiant :
$f(i) = -cj + bk$, $f(j) = ci - ak$ et $f(k) = -bi + aj$.
1°. Déterminer la matrice M de f dans la base (i, j, k).
Calculer M^2, M^3 et en déduire une relation entre M et M^3.
2°. On pose $u = ai + bj + ck$, $v = f(i)$ et $w = -f \circ f(i)$. Calculer les coord de u, v, w et $f(u)$ dans la base (i, j, k).
Vérifier que (u, v, w) est aussi une base de $\mathbb{R}^3$et déterminer la matrice de f dans cette base.

V

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1°. Calculer A^2, A^3, déterminer $\ker A$ et Im A en précisant une base et leur dimension.
2°. Déterminer $\ker A^2$ et Im A^2. A est-elle inversible ?

VI

Soit $\mathbb{R}_n[x] = \{P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefs dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
1°. Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2°. Pour $k = 0, ..., n$, considérons les polynômes $P_k(x) = x^k$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est libre.
3°. En déduire une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et sa dimension. Quelles sont les coord d'un polynôme dans cette base ?
4°. Considérons l'application d définie par $\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto & d(P) = P' \end{array}$
Montrer que d est linéaire et déterminer sa matrice dans la base définie ci dessus.
5°. Expliciter $\ker d$ et Im d.

6°. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{rcl} \delta_\alpha : \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \delta_\alpha(P) = P(\alpha) \end{array}$

Montrer que δ_α est linéaire, déterminer sa matrice, son noyau et son image.

VII

Considérons l'application $\begin{array}{rcl} \tau : M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \tau(M) = {}^tM \end{array}$

1°. Expliquer pourquoi τ est linéaire.
2°. Après avoir rappelé la forme de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de τ dans cette base.
3°. Déterminer $\ker\tau$ et Im τ

VIII

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 muni de sa base canonique $1, x, x^2$.
Considérons l'application $\begin{array}{rcl} u : \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ P & \mapsto & u(P) = \int_x^{x+1} P(t)dt \end{array}$

1°. Démontrer que u est une application linéaire et déterminer sa matrice M dans la base canonique.
2°. Calculer M^{-1}.
3°. En déduire le polynôme P vérifiant $\displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt = 6x^2 + 4x + 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

IX

Notons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On travaillera dans la base $\{x^2, x, 1\}$ de cet espace. On considère une application $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme $P = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $u(P) = bx^2 + cx + a$.

1°. Démontrer que u est linéaire et déterminer sa matrice M dans la base $\{x^2, x, 1\}$.
2°. Calculer M^2 et M^3. Expliquer la forme de M^3.
3°. Déterminer $\ker u$ et Im u en présisant une base et la dimension.
4°. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

X

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui s'écrivent sous la forme $u(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

1°. Démontrer (rapidement) que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont vous donnerez une base et la dimension.
2°. Montrer que les fonctions $\cosh x$ et $\sinh x$ appartiennent à $\mathcal{E}$ et déterminer leurs coordonnées dans la base.
3°. On considère la fonction $d : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à une fonction $u(x)$ associe sa dérivée $u'(x)$. Démontrer que d est linéaire et déterminer sa matrice D dans la base ci-dessus. Déterminer les images par d de $\cosh x$ et $\sinh x$. Déterminer $\ker d$ et Imd.
4°. Démontrer que $\{\cosh x, \sinh x, 1\}$ forment une base de $\mathcal{E}$. Déterminer une matrice de passage de la base initiale vers cette nouvelle base ainsi que la matrice de d dans cette base.

XI

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = 0$.

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.
2°. Démontrer que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
3°. Démontrer que toute solution de $\mathcal{E}$ est de la forme $\alpha \sin x + \beta \cos x$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En déduire, en justifiant, la dimension et une base de $\mathcal{E}$.

XII

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui sont combinaison linéaire de sin et cos. Nous noterons :
$\mathcal{E} = \{u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont vous déterminerez une base et la dimension.
2°. Soit d la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à une fonction $u(x)$ associe sa dérivée $u'(x)$. Démontrer que d est linéaire et déterminer sa matrice D dans la base canonique de $\mathcal{E}$.
3°. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$. Expliquez le résultat.

XIII

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Calculer $(A - I)^2$, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}

2°. Considérons l'application linéaire u qui à un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + (a + c)$. Montrer que u est linéaire et déterminer sa matrice dans la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
3°. Quel est l'antécédent par u du polynôme $S(x) = x^2 + x - 1$?

XIV

Dans $\mathbb{R}^3$muni de sa base canonique, déterminer les matrices des transformations suivantes :
1°. Symétrie d'axe (Ox), d'axe (Oy), puis d'axe (Oz).
2°. Rotation d'angle θ autour de (Oz), puis d'angle ϕ autour de (Ox).
3°. Homothétie de centre O et de rapport k.
4°. Symétrie d'axe (Oz) suivie d'une rotation d'angle ϕ autour de (Ox) et d'une homothétie de rapport k.

Applications.

XV Transformée de Fourier discrète.

Un signal échantillonné $(x_n)_{n\geq 0}$ N-périodique peut être modélisé par un vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ de coordonnées $(x_0, x_1, ..., x_{N-1})$.
La transformée de Fourier discrète de ce signal est le vecteur $\hat{X}$ de coordonnées $\hat{x}_k = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}$.
La suite $(\hat{x}_k)_{k\geq 0}$ est elle aussi N-périodique et se représente par $\hat{X} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{N-1})$
La transformée de Fourier inverse permet de retransformer $\hat{X}$ en X et est donnée par $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2\pi i n \frac{k}{N}}$

Posons $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ et $\Omega = \dfrac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{C})$. On a alors $\hat{x}_k = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{nk}$

1°. Démontrer que $\hat{X} = \Omega X$ et déduire que l'application qui à une suite associe sa transfo de Fourier discrète est linéaire.
En se souvenant des propriétés des déterminants de Vandermonde, montrer que cette application est bijective.
2°. Démontrer que $\Omega\bar{\Omega} = \dfrac{1}{N}I$ où I est la matrice identité de $M_N(\mathbb{C})$.
En déduire la matrice inverse de Ω et le vérifier à l'aide de l'expression de la transfo inverse.
3°. Démontrer la formule de Parseval pour la transfo discrète : $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2$
4°. On appelle convolution circulaire sur deux suites périodiques x et y de période N, la suite notée $x \star y$ définie par : $x \star y = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}$. C'est l'analogue du produit de convolution pour des phénomènes discrets.
Démontrer que $x \star y$ est une suite N-périodique et que $\widehat{x \star y} = \hat{x} \star \hat{y}$
5°. Considérons une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On sait d'après le théorème de Dirichlet que sa série de Fourier $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}$ est absolument convergente et est égale à $f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
On se propose de comparer les coefs de Fourier c_k de la série avec les coefs $\hat{x}_k$ de la transformée discrète.
Démontrer que $x_n = f(\dfrac{2n\pi}{N}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{k+Np})\omega^{nk}$
En déduire la relation cherchée (on pourra poser $m = Np + n$, $p \in \mathbb{Z}$, $n = 0, ..., N - 1$ et regrouper les termes de la première série en paquets de N termes consécutifs - on admettra que cette opération est licite - afin de faire apparaître la double somme ci dessus).

XVI Codes correcteurs linéaires.

On rappelle que $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ est l'ensemble des entiers modulo 2 muni de l'addition et de la multiplication modulo 2.
On souhaite envoyer un message de m bits ; un codage consiste à transformer ce message en un mot codé de $n = m + k$ bits, les k bits supplémentaires servant à détecter et corriger d'éventuelles erreurs de transmission. Le message initial et son code seront représentés par des vecteurs de $(\mathbb{F}_2)^m$ et $(\mathbb{F}_2)^n$.

Le code est dit linéaire si la fonction d'encodage Λ permettant de transformer un message en mot codé est elle même linéaire. On la représente alors par une matrice $G \in\ M_{m,n}(\mathbb{F}_2)$ et si M est le message, $U = MG$ sera le mot codé correspondant. Il faut faire très attention : en théorie du codage, l'habitude veut qu'on travaille en ligne plutôt qu'en colonne. Ce sont donc les lignes d'une matrice qui vont donner les images des vecteurs de base et les images de vecteurs par une application linéaire seront calculées en mettant un vecteur ligne avant la matrice.

Afin de détecter les erreurs, on utilise une matrice $H \in M_{n,k}(\mathbb{F}_2)$ appelé matrice de contrôle du code, que l'on construit à partir de G de telle sorte qu'une séquence U de n bits appartient au code si et seulement $H \times^t U = 0$.

Le vecteur $s = H \times^t U$ s'appelle le syndrôme d'erreur du mot reçu. Lorsqu'il est nul, il n'y a pas eu d'erreur dans la transmission (ou trop pour pouvoir les détecter). Sinon, s correspond à une des colonnes de la matrice de parité. L'indice de cette colonne indique alors la position de l'erreur. Toutes les opérations sont effectuées modulo 2.

On appelle distance minimale du code le plus petit nombre de colonnes de H liées. Cette quantité est une caractéristique importante du code.

On s'intéresse dans cet exercice au code de Hamming de longueur $n = 7$. Ses matrices d'encodage et de parité sont données ci-dessous :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1°. Démontrer rapidement que $(\mathbb{F}_2)^m$ et $(\mathbb{F}_2)^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$.
2°. Démontrer que G est la matrice de Λ dans la base canonique de $(\mathbb{F}_2)^m$.
3°. Démontrer que l'ensemble des mots du code forme un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{F}_2)^n$ de dimension m.
On notera $\mathcal{C}$ cet espace et on l'appelera "code correcteur".
4°. Démontrer qu'un vecteur $u \in (\mathbb{F}_2)^n$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $u \in \ker H$
5°. Déterminer le rang de la matrice H et en déduire la distance minimale du code.
6°. Combien existe-t-il de mots dans ce code ?
7°. On reçoit le message $M = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$. Y a-t-il eu erreur dans la transmission ? Si oui, quel était le message initial ?
8°. On considère maintenant le code dont les matrices G et H sont données par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Que fait ce code ? Donner un exemple de codage d'un message et de détection d'erreur.
9°. On considère maintenant le code dont les matrices G et H sont données par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Répondre aux même questions que dans le 8° pour ce code.

XVII Séries de Fourier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $e_n(x) = e^{inx}$. On note $\mathbb{E}_n$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques s'écrivant comme combinaison linéaire des fonctions e_k pour k variant de $-n$ à n :

$$\mathbb{E}_n = \{S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} /\ S(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx};\ c_k \in \mathbb{C}\}$$

Pour toute fonction S de $\mathbb{E}_n$ on pose $||S_n|| = \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k^2 \right)^{1/2}$ et on rappelle que si f est de carré intégrable, le théorème de Parsavel assure que $||f||^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)^2$

1°. Démontrer que $\mathbb{E}_n$ est un espace vectoriel de dimension $2n + 1$ et en donner une base.
2°. On suppose S développable en série de Fourier et l'on note $c_n(S)$ ses coefficients de Fourier complexes.
Exprimer les coordonnées de S dans la base de $\mathbb{E}_n$ à l'aide de ses coefficients de Fourier.
3°. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?
4°. On considère maintenant une fonction f 2π-périodique et de carré intégrable et l'on note $S_n(x)$ son polynôme de Fourier d'ordre n. Démontrer que $S_n \in \mathbb{E}_n$ et exprimer ses coordonnées dans la base de $\mathbb{E}_n$ à l'aide des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f.
5°. Donner une interprétation géométrique de $||S_n||$ et $||f||$ et déterminer une relation entre ces deux quantités.

XVIII Interpolation de Lagrange.

On dispose de $n + 1$ valeurs réelles $x_0, x_1, ..., x_n$ et d'une fonction f. On cherche un polynôme qui prennent les mêmes valeurs que f en ces points. Le théorème d'interpolation de Lagrange assure l'existence et l'unicité d'un unique polynôme de degré n appelé polynôme interpolateur de f et vérifiant $P(x_k) = f(x_k)\ \forall\ k = 0, ..., n$.

Posons $L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_k}{x_k - x_i}$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$

1°. Constater que les $L_k(x)$ sont des polynômes. Quels sont leurs zéros ?
2°. Quel est le degré de $P(x)$? Calculer $P(x_k)$, $\forall k = 0, ..., n$.
3°. En déduire que $P(x)$ est le polynôme recherché.
4°. Démontrer que $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et en déduire que $P(x)$ est unique.

XIX Equations différentielles linéaires.

1°. On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène : $y'(t) + ay(t) = 0$
Intégrer cette équation et démontrer que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. En donner une base.

2°. On considère une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$
On suppose que l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2. Démontrer que $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ sont solutions, puis démontrer que toute combinaison linéaire de ces deux solutions est encore solution de l'équation. Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

3°. On suppose que l'équation caractéristique a une solution double r_0. Démontrer que $e^{r_0 x}$ et $xe^{r_0 x}$ sont solutions, puis démontrer que toute combinaison linéaire de ces deux solutions est encore solution de l'équation. Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

4°. On suppose que l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $u \pm iv$. Démontrer que $e^{ux}\cos(vx)$ et $e^{ux}\sin(vx)$ sont solutions, puis démontrer que toute combinaison linéaire de ces deux solutions est encore solution de l'équation. Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

XX Infographie et géométrie projetctive.

XXI Echantillonnage et formule de Shannon.

XXII Théorie algébrique des graphes.

XXIII Mécanique du solide.

A venir...