MATHEMATIQUES TD N°7 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES - CORRIGE.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Equations à variables séparables

1°. $y' = y$
$\iff y'/y = 1 \iff \ln y = x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
$\iff y = ke^x$

2°. $y' - y = 0$
C'est la même équation. Pour la résoudre, on fait passer y dans le membre de droite et on procède comme ci-dessus. C'est une technique générique. Même si les variables sont séparées dans l'équation initiale, la forme adéquate pour la résolution est $y' = y$.

3°. $y' + 2y = 0$
$\iff y' = -2y \iff y = ke^{-2x}$, avec $k \in \mathbb{R}$

4°. $xy' - y = 0$
$\iff y'/y = 1/x \iff \ln|y| = \ln|x| + K \iff y = kx$ $k \in \mathbb{R}$

5°. $y' - xy = 0$
$\iff y' = xy \iff \dfrac{y'}{y} = x$
$\iff \ln|y| = \dfrac{1}{2}x^2 + K \iff y = ke^{x^2/2}$ $k \in \mathbb{R}$

6°. $y' + y\sin x = 0$
$\iff y'/y = -\sin x \iff \ln y = \cos x + K$
$\iff y = ke^{\cos x}$ $k \in \mathbb{R}$

7°. $y' = y^2 \iff y'/y^2 = 1 \iff -1/y = x + K$
$\iff y = \dfrac{-1}{x+K}$, $k \in \mathbb{R}$

8°. $y'\sin x - 2y\cos x = 0$
$\iff y'/y = 2\cos x/\sin x \iff \ln y = 2\ln\sin x + K$
$\iff y = k\sin^2 x$, $k \in \mathbb{R}$

9°. $y'e^y - e^x - x = 0 \iff y'e^y = e^x + x$
$\iff e^y = e^x + x^2/2 + k \iff y = \ln(e^x + \dfrac{x^2}{2} + k)$ avec $k \in \mathbb{R}$

10°. $(1+x^2)^2y' + 2x + 2xy^2 = 0$
$\iff (1+x^2)^2y' = -2x(1+y^2)$
$\iff \dfrac{y'}{1+y^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\iff \arctan y = \dfrac{1}{1+x^2} + k \iff y = \tan(\dfrac{1}{1+x^2} + k)$, $k \in \mathbb{R}$

11°. $(x^2+1)y' = xy \iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2+1}$
$\iff \ln|y| = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$
$\iff |y| = \exp(\ln\sqrt{1+x^2}) + k \iff |y| = e^k e^{\sqrt{1+x^2}}$
$\iff y = K\sqrt{1+x^2}$, $K \in \mathbb{R}$
Il est important de comprendre le rapport entre k et K : k est une constante réelle quelconque, ainsi e^k est une constante réelle strictement positive. Afin de faire disparaître la valeur absolue du membre de gauche, on utilise le fait que $|x| = a \iff x = \pm a$. Ainsi, $K = \pm e^k$ est une constante réelle quelconque.

12°. $y^2y' = x^2 \iff \dfrac{1}{3}y^3 = \dfrac{1}{3}x^3 + k \iff y = \sqrt[3]{x^3 + k}$

13°.
$xy'\ln x = (1+3\ln x)y \iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1+3\ln x}{x\ln x} = \dfrac{1}{x\ln x} + \dfrac{3}{x}$
$\iff \ln|y| = \ln|\ln x| + 3\ln|x| + k \iff y = kx^3\ln x$, $k \in \mathbb{R}$

14°. $y'(x+2) = y - 1 \iff \dfrac{y'}{y-1} = \dfrac{1}{x+2}$
$\iff \ln|y-1| = \ln|x-2| + k \iff y = k(x+2) + 1$, $k \in \mathbb{R}$

15°. $x^2y' - (2x-1)y = 0 \iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
$\iff \ln|y| = 2\ln|x| + \dfrac{1}{x} + k \iff y = kx^2e^{1/x}$

16°. $y' + 4y = 1 \iff y' = 1 - 4y \iff \dfrac{y'}{1-4y} = 1$
$\iff -\dfrac{1}{4}\ln|1-4y| = x + k \iff y = ke^{-4x} + 1/4$

17°. $(1+x^2)y' = 1 + y^2 \iff \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\iff t = \tan(\arctan x + k)$

18°. $\sqrt{1+x^2}y' - y^2 = y + 1 \iff \dfrac{y'}{1+y+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
La fraction de droite s'intègre en $argsh(x)$ et il faut décomposer en éléments simples celle de gauche. Puisque le polynôme au dénominateur est irréductible, on doit le mettre sous forme canonique pour faire apparaître un arctan. Après calcul, il vient :
$\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y + \dfrac{1}{2})\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}argsh(x) + k$
$\iff y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}argsh(x) + k\right) - \dfrac{1}{2}$

19°. $y' = e^{x+y} \iff y'e^{-y} = e^x \iff y = -\ln(k - e^x)$, $k \in \mathbb{R}$

20°. $x^2y' + y(1-y) = 0 \iff \dfrac{y'}{y(1-y)} = -\dfrac{1}{x^2}$
On décompose en éléments simples la fraction :
$\iff \ln|y| - \ln|y-1| = \dfrac{1}{x} + k \iff \dfrac{y}{y-1} = ke^{1/x}$
$\iff y = \dfrac{ke^{1/x}}{ke^{1/x} - 1}$, $k \in \mathbb{R}$

II. Equations linéaires d'ordre 1

Nous noterons systématiquement $\mathfrak{E}$ l'équation avec second membre et $\mathfrak{E}^*$ l'équation homogène associée.

1°. $y' + y = x$
L'équation homogène est $y' + y = 0$ dont les solutions sont $y = ke^{-x}$ $k \in \mathbb{R}$.
$y_0(x) = x - 1$ est clairement solution particulière et les solutions de l'équation avec second membre sont donc $y = ke^{-x} + x - 1$

2°. $y' + y = x^2$
L'équation homogène est la même. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $y_0'(x) = 2ax$ et en injectant dans l'équation il vient $a = 1, b = -2, c = 2$. La solution générale de l'équation est donc $y(x) = ke^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

3°. $y' + y = e^x$
Une solution particulière est $e^x/2$. La solution générale de l'équation initiale est $y(x) = ke^{-x} + e^x/2$

4°. $y' + y = \sin x$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\sin x + b\cos x$. Alors $y_0'(x) = a\cos x - b\sin x$ et en injectant dans l'équation il vient $a = 1/2$ et $b = -1/2$. La solution générale de l'équation est donc $y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

5°. $(1+x^3)y' - x^2y = x^2$
L'équation homogène est à variables séparables. On a $\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1+x^3} \iff \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + k$
$\iff y = k\sqrt[3]{1+x^3}$, $k \in \mathbb{R}$
On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre : la fonction constante -1 convient car sa dérivée est nulle et l'on a donc $-x^2y = x^2$. D'après le théorème du cours, la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière. Elle est donc de la forme
$y(x) = k\sqrt[3]{1+x^3} - 1\,;\ \ k \in \mathbb{R}$.

6°. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1 \quad (\mathfrak{E})$
$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \quad (\mathfrak{E}^*) \iff y = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}$
Une solution particulière peut être trouvée sous la forme d'un polynôme, $y = x$ convient et la solution générale de l'équation avec second membre est donc $y = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}} + x$

7°. $y' - y = 1 \quad (\mathfrak{E})$ et $y' - y = 0 \quad (\mathfrak{E}^*)$
$\iff y = ke^x$ et $y = -1$ est solution particulière évidente. On a donc comme solution générale de l'équation avec second membre $y = ke^x - 1$, $k \in \mathbb{R}$

8°. $y'x - 2y = \ln x \quad (\mathfrak{E})$ et $y'x - 2y = 0 \quad (\mathfrak{E}^*)$
$z(x) = kx^2$ est solution de $(\mathfrak{E}^*)$ et $y_0(x) = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}$ est solution particulière évidente de l'équation avec second membre (si vous ne la trouvez pas évidente, vous pouvez également effectuer la technique de la variation de la constante).
La solution générale est donc $y(x) = kx^2 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}$

9°. $y' + y\cos x = \cos x$
L'équation homogène est à variables séparables.
$\iff \frac{y'}{y} = -\cos x \iff y = ke^{-\sin x}$, $k \in \mathbb{R}$. Nous cherchons ensuite une solution particulière. $y_0(x) = 1$ est solution évidente et la solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(x) = ke^{-\sin x} + 1$

10°. $y' + 2y = e^{-x}$
L'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$ et possède comme solution ke^{-2x}. Par ailleurs, e^{-x} est solution particulière ; la solution générale est donc $y = ke^{-2x} + e^{-x}$

11°. $2xy' + 2y = \frac{1}{1+x} \iff y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2x(1+x)} \quad (\mathfrak{E})$
$y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (\mathfrak{E}^*)$ a pour solution k/x, $k \in \mathbb{R}$
La recherche de la solution particulière doit se faire par la méthode de la variation de la constante. On suppose donc que $z(x) = \frac{k(x)}{x}$, avec $k(x)$ fonction de classe C^1, est solution de l'équation avec second membre. On a
$z'(x) = \frac{k'(x) \times x - k(x)}{x^2}$
Maintenant si $z(x)$ est solution de l'équation, elle doit la vérifier, et l'on doit donc avoir :
$\frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k}{x^2}$
$= \frac{1}{1+x} \iff k'(x) = \frac{x}{1+x} \iff k'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$
$\Rightarrow k(x) = x - \ln(1+x) \Rightarrow z(x) = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x}$
$\Rightarrow y = \frac{1}{x}(k + x - \ln(1+x))$

12°. $y' - y\tan x = -\cos^2 x$
L'équation homogène associée est $y' - y \times \tan x = 0$ dont la solution est de la forme $z(x) = \frac{k}{\cos x}$
Pour déterminer la solution particulière, on utilise la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y_0(x) = \frac{k(x)}{\cos x}$ où $k(x)$ n'est plus une constante réelle mais une fonction de classe C^1 de x. On a :
$y_0'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}(k'\cos x + k\sin x)$
$\Rightarrow k'(x) = -\cos^3 x = -\frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$
$\Rightarrow k(x) = -\frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\sin x$ et donc
$y(x) = \frac{1}{\cos x}(k - \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\sin x)$

13°. $y' + 4y = x^2$
L'équation homogène associée est $y' + 4y = 0$ dont la solution est de la forme ke^{-4x} et une solution particulière doit être cherchée sous la forme d'un polynôme de degré 2 $ax^2 + bx + c$.
$\Rightarrow 2ax + b + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2$
$\Rightarrow a = 1/4, b = -a/2 = -1/8, c = -b/4 = 1/32$
$y(x) = ke^{-4x} + \frac{1}{32}(8x^2 - 4x + 1)$

14°. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$
La solution de l'équation homogène $\frac{y'}{y} = -\frac{e^x}{e^x-1}$ est $z(x) = \frac{k}{e^x - 1}$ et l'on doit utiliser la variation de la constante pour déterminer la solution particulière de l'équation avec second membre :
$y_0'(x) = \frac{k'(e^x-1) - ke^x}{(e^x-1)^2}$ et en injectant cette expression dans l'équation, on obtient $k' = 1$ donc $k = x$. Ainsi, $y(x) = \frac{k+x}{e^x-1}$, $k \in \mathbb{R}$

15°. $(1+x^2)y' + y = \arctan x$
L'équation homogène est $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ dont la solution est $z(x) = ke^{-\arctan x}$. La solution particulière se calcule à l'aide de la variation de la constante.
On trouve $k'(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}e^{\arctan x}$ et une intégration par parties donne $y_0(x) = \arctan x - 1$
La solution générale est $y = ke^{-\arctan x} + \arctan x - 1$

16°. $y' - y\tan x = \frac{1}{1+\cos x}$
L'équation homogène est la même que dans la question 8 et la so-
lution est $z(x) = \frac{k}{\cos x}$. Par variation de la constante, on a
$k'(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x} = 1 - \frac{1}{2\cos^2(x/2)} \Rightarrow k(x) = x - \tan(x/2)$
$y(x) = \frac{1}{\cos x}(k + x - \tan(x/2))$

17°. $xy' - 2y = x^5$. L'équation homogène est $xy' - 2y = 0$
$\iff y'/y = 2/x \iff \ln|y| = 2\ln|x| + k \iff y = kx^2$
Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser la

méthode de la variation de la constante. On suppose que la solution particulère est de la forme $y(x) = k(x)x^2$, où $k(x)$ est une fonction de classe C^1. En dérivant, $y'(x) = k'(x)x^2 + 2k(x)x$. En injectant les deux expressions dans l'équation avec second membre, on obtient $k'(x) \times x^2 = x^4 \iff k'(x) = x^2$ $\iff k(x) = x^3/3$ et donc la solution particulière est de la forme $x^2x^3/3 = x^5/3$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(x) = kx^2 + x^5/3$

18°. $2xy' - y = \sqrt{x}$. L'équation homogène est $2xy' - y = 0 \iff y'/y = 1/2x \iff \ln y = \frac{1}{2}\ln x + K$ $\iff y = k\sqrt{x}$ (pour gagner du temps, nous ne faisons pas toujours apparaître la valeur absolue dans le ln, mais il ne faut pas oublier qu'elle s'y trouve ; nous n'explicitons pas non plus le rapport entre K et k ; ici, on a $k = \pm e^K$). Nous devons ensuite trouver une solution particulière à l'équation avec second membre. En utilisant la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x)\sqrt{x} \Rightarrow y_0'(x) = k'(x)\sqrt{x} + k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$; en injectant dans l'équation et en simplifiant , il vient $k'(x) = 1/(2x) \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}\ln x$ et la solution particulière est donc de la forme $\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x$. La solution générale de l'équation avec seconde membre est donc $y(x) = \sqrt{x}(k + (1/2)\ln x)$

19°. $y' = |x - y|$. Il faut commencer par se débarrasser de la valeur absolue. Par définition, $|x - y| = x - y$ si $x > y$ et $y - x$ dans le cas contraire ; considérons donc une solution $y(x)$ pour laquelle $y(x) < x$. Nous avons $y' + y = x$ qui est une équation linéaire d'ordre 1 dont la solution est $y(x) = ke^{-x} + (x - 1)$. Cette fonction est $< x$ ssi $ke^{-x} < 1$. A vous de poursuivre...

20°. $y' + y = 2e^x + 2\sin x$. Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 1 dont le second membre s'écrit sous la forme d'une somme de deux fonctions simples. Commençons par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $z(x) = ke^{-x}$, $k \in \searrow$. Nous allons ensuite découper en deux le second membre, résoudre l'équation $y' + y = 2e^x$, résoudre l'équation $y' + y = 2\sin x$ puis ajouter les deux solutions pour obtenir la solution de l'équation initiale (par linéarité de l'équation). Après calculs, la solution générale s'écrit $y(x) = ke^{-x} + \sin x - \cos x + e^x$

III. Autres types d'équations d'ordre 1

1.1. $(x^2 + y^2) - xyy' = 0$

En posant $y = ux$ on
$y' = u'x + u \Rightarrow x^2 + u^2x^2 - x.ux.(u'x + u) = 0$
$\Rightarrow uu' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{\ln x + k}$

1.2. $xy' = y - x\cos^2 \dfrac{y}{x}$

$y = ux \Rightarrow u'x + u = u - \cos^2 u \Rightarrow \tan u = -\ln|x| + k$
$\Rightarrow y = x.\arctan(k - \ln|x|)$

2.1. $y' + 2y - (x + 1)\sqrt{y} = 0$

$u = \sqrt{y} \Rightarrow u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow 2u' + 2u = x + 1$
qui est une équation linéaire. L'équation homogène associée a pour solution $u = ke^{-x}$ et $x/2$ est solution particulière $u = ke^{-x} + \dfrac{x}{2} = \sqrt{y} \Rightarrow y = (ke^{-x} + \dfrac{x}{2})^2$

2.2. $xy' + y = xy^3$

On pose $u = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow u' = -\dfrac{2}{y^3}y' \Rightarrow$
$-\dfrac{x}{2}y^3u' + y = xy^3 \Rightarrow -\dfrac{x}{2}u' + u = x \Rightarrow u' - \dfrac{2}{x}u = -2$ qui est une équation linéaire. La solution de l'équation homogène associée est kx^2 et la variation de la constante donne comme solution particulière $k = 2/x$. Ainsi, $u = kx^2 + 2x$ d'où $y\dfrac{\pm 1}{\sqrt{kx^2 + 2x}}$

2.3. $y' + y\tan x + y^2 = 0$

On pose $u = 1/y \Rightarrow u' = -y'/y^2 \Rightarrow u' - u\tan x = -1$
L'équation homogène associée admet $\dfrac{k}{\cos x}$ comme solution et la variation de la constante donne la solution particulière. Au final, $y = \dfrac{\cos x}{k - \sin x}$, $k \in \mathbb{R}$

IV. Equations linéaires d'ordre 2

1°. $y'' + 6y' = 2$
L'équation caractéristique est $r^2 + 6r = 0$ dont les solutions sont 0 et -6. La solution de l'équation homogène est donc $k_1 + k_2e^{-6x}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $\frac{x}{3}$ est solution particulière et l'on en déduit alors

$$\boxed{y(x) = k_1 + k_2e^{-6x} + \frac{x}{3}}$$

2°. $y'' - 6y' - 7y = 2e^{-x}$
L'équation caractéristique est $r^2 - 6r - 7 = 0$ dont les solutions sont -1 et 7. La solution de l'équation homogène est donc $k_1e^{-x} + k_2e^{7x}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme αxe^{-x} car le second membre est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec P_n polynôme de degré 0 et $k = -1$ qui est une racine simple de l'équation caractérisitique. En injectant l'expression dans l'équation on a $\alpha = -1/4$ d'où

$$\boxed{y(x) = k_1e^{-x} + k_2e^{7x} - \frac{1}{4}xe^{-x}}$$

3°. $y'' + 4y = 0$
L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm 2i$. La solution de l'équation homogène est donc $\boxed{y(x) = k_1\cos 2x + k_2\sin 2x}$

4°. $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x$
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont la solution double est 2. La solution de l'équation homogène est donc $(k_1 + k_2x)e^{2x}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $(ax + b)e^x$ et par identification on trouve $a = 2$ et $b = 0$ d'où :

$$\boxed{y(x) = (k_1 + k_2x)e^{2x} + 2xe^x}$$

5°. $y'' - y = x^2 + x + 1$ L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1. La solution de l'équation homogène est donc $(k_1e^x + k_2e^{-x}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = -x^2 + \alpha x + \beta$. En ce cas, $y_0'(x) = -2x + \alpha$ et $y_0''(x) = -2$. En injectant dans l'équation, on obtient $\alpha = -1$ et $\beta = -3$ d'où

$$\boxed{y(x) = k_1e^x + k_2e^{-x} - x^2 - x - 3}$$

6°. $y'' - 2y' + y = (6x + 4)e^x$ L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la solution double est 1. La solution de l'équation homogène est donc $(k_1x + k_2)e^x$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = x^2(\alpha x + \beta)e^x$ car 1 est racine double de l'équation caractéristique. On obtient $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ d'où

$\boxed{y(x) = (k_1x + k_2)e^x + (x^3 + 2x^2)e^x}$

7°. $y'' = x + 1$ On peut intégrer directement!!
$y' = \frac{1}{2}x^2 + x + k_1$ et donc

$\boxed{y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + k_1x + k_2}$

8°. $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$ dont les solutions sont $-1 \pm i$. La solution de l'équation homogène est donc $e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x$:
$y_0'(x) = \alpha\cos x - \beta\sin x$ et $y_0''(x) = -\alpha\sin x - \beta\cos x$
En injectant dans l'équation, on obtient $\alpha - 2\beta = 1$ et $\beta + 2\alpha = 0$ donc $\alpha = 1/5$ et $\beta = -2/5$. D'où

$\boxed{y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x}$

9°. $y'' + 2y' + y = x$. Nous donnons maintenant simplement la solution générale de l'équation avec second membre : $y(x) = (A + Bx)e^{-x} + x - 2$

10°. $y'' - 3y' + 2y = 1$. La solution générale est $y(x) = Ae^{2x} + Be^x + 1/2$

11°. $y'' - 4y' + 5y = 0$. La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{2x}$

12°. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin x$. L'équation homogène a été résolue dans la question précédente. La solution particulière est à chercher sous la forme $e^{2x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$. On s'aperçoit alors que l'on arrive à une absurdité. On doit donc chercher la solution particulière sous la forme $x \times e^{2x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$. Après calculs, on trouve $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$. Si on avait obtenu à nouveau une absurdité, il aurait fallu chercher la solution particulière sous la forme $x^2 \times e^{2x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$.
Finalement, l'équation générale admet pour solution $y(x) = (A + Bx)e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x}\cos x$

13°. $y'' + 2y' + 2y = 0$
C'est une équation homogène dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$. $\Delta = -4$ et les solutions sont $r = -1 \pm i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$

14°. $y'' + 2y' + 2y = 5e^x$
L'équation homogène est la même que ci-dessus. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ae^x$. Alors $y_0'(x) = y_0''(x) = ae^x$ et en injectant dans l'équation, on obtient $a = 1$. La solution générale est : $y(x) = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x) + e^x$

15°. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2$
L'équation homogène est la même que ci-dessus. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $y_0'(x) = 2ax + b$, $y_0''(x) = 2a$, $\Rightarrow (2a) + (4ax + 2b) + (2ax^2 + 2bx + 2c) = 2x^2$, d'où $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, ie $y_0(x) = (x-1)^2$. La solution générale est : $y(x) = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x) + (x-1)^2$

16°. $y'' + 2y' + 2y = 5e^x + 2x^2$
Par linéarité, il suffit d'ajouter les deux solutions précédentes :
$y(x) = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x) + e^x + (x-1)^2$

V. Equations incomplètes

1°. Résoudre $y'' + \frac{x}{1+x}y' = 0$ en posant $u = y'$

On pose $u = y'$ et l'équation devient $u' + \frac{x}{1+x}u = 0$ qui est à variables séparables et d'ordre 1. On trouve $u = k(1+x)e^{-x}$ et la solution de l'équation initiale est donc $y = \int u = k\int(1+x)e^{-x}dx + k'$, $k, k' \in \mathbb{R}$
La primitive est de la forme $k(\alpha x + \beta)e^{-x} + k'$ et par identification, on obtient

$\boxed{y(x) = K(x+2)e^{-x} + K'}$

2°. Résoudre de même $y'' - \frac{1}{x}y' = 1$

De la même façon on pose $u = y'$ et l'équation devient $u' - \frac{1}{x}u = 0$ dont la solution est $(k + \ln x)x$ (on trouve la solution particulière par variation de la constante). La solution de l'équation initiale est donc une primitive de cette fonction. Par intégration par parties, on trouve

$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + Kx^2 + K'}$

VI. Equations fonctionnelles

On souhaite trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $f'(x) = f(\frac{1}{x})$

1°. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$.

$f'(x) = f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}f(x)$
$\Rightarrow x^2y'' + y = 0$

2°. $u(x) = y(e^x) \Rightarrow u'(x) = e^xy'(e^x) \Rightarrow$
$u''(x) = e^xy'(e^x) + e^{2x}y''(e^x)$
Ainsi, $x^2y'' + y = 0 \Rightarrow e^{2x}y''(e^x) + y(e^x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow u''(x) - u'(x) + u(x) = 0$ qui est une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre 2 à coefs constants.

3°. L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$
$\Delta = -3 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u(x)$
$= e^{x/2}(1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ Mais
$u(x) = y(e^x) \iff y(x) = u(\ln x)$
$y(x) = \sqrt{x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x))$

4°. Dérivons à nouveau l'expression :
$f''(x) = -f'(1-x) = -f(1-(1-x)) = -f(x)$. Toute solution de cette équation fonctionnelle est donc solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ dont les solutions sont de la forme $y(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Parmi toutes ces solutions, nous devons maintenant déterminer lesquelles satisfont l'équation initiale. Nous avons
$f'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x$ et
$f(1-x) = \alpha\cos(1-x) + \beta\sin(1-x)$
$= \alpha\cos 1\cos x + \alpha\sin 1\sin x + \beta\sin 1\cos x - \beta\cos 1\sin x$.
L'égalité des deux expressions conduit à un système de deux équations à deux inconnues :
$\begin{cases} \alpha\cos 1 + \beta\sin 1 = \beta \\ \alpha\sin 1 - \beta\cos 1 = -\alpha \end{cases}$ Après calculs, nous obtenons $\alpha = \sin 1(\cos 1 - \sin 1)$ et $\beta = (\alpha + 1)\tan 1$. La solution est donc unique.

VII. BE 1998

$E_1 :\ y'' + 4y' + 5y = \cos t$ et $E_2 :\ y'' + 4y' + 5y = te^t$

1°. Déterminer α et $\beta \in \mathbb{R}$ pour que $\alpha\cos t + \beta\sin t$ soit une solution de E_1.

$z = \alpha\cos t + \beta\sin t \Rightarrow z' = -\alpha\sin t + \beta\cos t$
$\Rightarrow z'' = -\alpha\cos t - \beta\sin t$
z solution de E_1 doit vérifier l'équation. En injectant et en identifiant, on a $\alpha = \beta$ et $4\alpha + 4\beta = 1$ d'où
$\alpha = \beta = 1/8$

2°. Résoudre l'équation E_1, puis l'équation E_2.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 5 = 0$,
$\Delta = -4 \Rightarrow r = -2 \pm i$ $y_0(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$ une solution particulière est donnée par la fonction de la question précédente et l'on en déduit que
$y(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{8}(\cos t + \sin t)$

Pour résoudre E_2, il suffit d'ajouter une solution particulière à la solution de l'équation homogène. Cette solution est de la forme $y_0(t) = (\alpha t + \beta)e^t$; en calculant la dérivée première et seconde puis en injectant les résultats dans l'équation, on obtient $\alpha = 1/10$ et
$\beta = -3/50$ donc
$y(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{10}(t - 3/5)e^t$

3°. Déterminer la solution de E_2 vérifiant
$y(0) = y'(0) = 0$.

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 3/50$ et $y'(0) = 0 \Rightarrow B = -4/50$ et
$y(t) = \dfrac{1}{50}e^{-2t}(-3\cos t - 4\sin t) + \dfrac{1}{10}(t - \dfrac{3}{5})e^t$

4°. Résoudre l'équation différentielle
$y'' + 4y' + 5y = \cos t + te^t$

Par linéarité, il suffit d'ajouter les solutions des deux équations différentielles précédentes.

VIII. BE 1999

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$ les équations différentielles
$E: \ y'' - 2ay' + (a^2+1)y = \cos t$ et
$H: \ y'' - 2ay' + (a^2+1)y = 0$

1°. Donner la solution générale de l'équation H.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2ar + (a^2+1) = 0$ dont les solutions sont $a \pm i$. La solution de l'équation homogène est donc $z(x) = e^{ax}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$

2°. Déterminer une solution particulière de E.

On cherche cette solution sous la forme
$y_0(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$. Là encore, en dérivant et en injectant le tout dans l'équation, on trouve $\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2+4}$
et $\beta = -\dfrac{2}{a(a^2+4)}$ si $a \neq 0$. Ainsi,
$y_0(x) = \dfrac{1}{a^2+4}(\cos x - \dfrac{2}{a}\sin x)$
Si $a = 0$, l'équation est $y'' + y = \cos t$ qui est classique à résoudre. En ce cas, la solution particulière est $\dfrac{1}{2}t\sin t$

3°. Si $a \neq 0$, déterminer l'unique solution de E vérifiant
$y(0) = y'(0) = 0$

Si $y(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \dfrac{1}{a^2+4} = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{a^2+4}$
Ensuite, comme $y'(x)$
$= e^{ax}(a\alpha\cos x + a\beta\sin x - \alpha\sin x + \beta\cos x) - \frac{\sin x + (2/a)\cos x}{a^2+4}$
$y'(0) = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{a^2+2}{a(a^2+4)}$ ie : $y(x) =$
$\dfrac{1}{a^2+4}\left(e^{ax}(-\cos x + \dfrac{a^2+2}{a}\sin x) + \cos x - \dfrac{2}{a}\sin x\right)$

IX. BE 2001

Trouver la solution de l'équation $y' - \ln xy = x^x$ qui satisfait $y(1) = 1 + \dfrac{1}{e}$

$y' - \ln xy = 0 \iff \dfrac{y'}{y} = \ln x \iff \ln|y| = x\ln x - x + k'$
$\iff y = kx^x e^{-x}$

Cherchons une solution particulière par variation de la constante, avec $y = ke^{x(\ln x - 1)} \Rightarrow y' = k'e^{\bullet} + k\ln xe^{\bullet}$
En injectant ensuite dans l'équation il vient $k' = e^x = k$ et donc $y(x) = x^x(ke^{-x} + 1)$

la condition initiale donne $k = 1$ et la solution est donc $y(x) = x^x(e^{-x} + 1)$

X. BE 2002

Considérons les équations différentielles

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0 & (H) \\ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin(2t) & (E_1) \\ y''(t) - 2y(t) + 2y(t) = 2e^t\sin t & (E_2) \end{cases}$$

1°. Résoudre ces trois équations.

L'équation homogène a pour équation caractérisitique $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les solutions sont $r = 1 \pm i$
$\Rightarrow z(x) = e^t(A\cos t + B\sin t)$, $A, B \in \mathbb{R}$
$y_0(t) = \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t$
$y_0'(t) = -2\alpha\sin 2t + 2\beta\cos 2t$
$y_0''(t) = -4\alpha\cos 2t - 4\beta\sin 2t$
En injectant ces trois expressions dans l'équation avec second membre, on obtient $\alpha = -2\beta$ et $4\alpha - 2\beta = 1$, ie
$\beta = -\dfrac{1}{10}$ et $\alpha = \dfrac{2}{10}$

$y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{10}(2\cos 2t - \sin 2t)$
De la même façon, une une solution particulière de E_2 est $y_0(t) = e^t(-t\cos t + \sin t)$

2°. Déterminer la solution de E_2 qui satisfait
$y(0) = y'(0) = 0$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ et $y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ donc
$y(t) = (\sin t - t\cos t)e^t$

3°. Existe-t-il une solution de E_2 vérifiant $y(0) = y(\pi) = 0$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ et
$y(\pi) = 0 \Rightarrow e^{\pi}(-A) + e^{\pi}(-\pi) = 0 \Rightarrow A \neq 0$ ce qui est impossible.

XI. BE 2003

On considère l'équation différentielle
$E_1: \ x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$ sur l'intervalle
$I =]0, 2[$
On note $y_1(x)$ la solution de cette équation qui satisfait $y_1(1) = 1$. Résoudre cette équation différentielle

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x-1}{x(2-x)} = -\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}) = u(x)$
$\Rightarrow \displaystyle\int u(x)\,dx = -\dfrac{1}{2}\ln|x(x-2)| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$
$\Rightarrow z(x) = \dfrac{k}{\sqrt{x(2-x)}}$

La solution particulière est à calculer avec la variation de la constante :

$y_0'(x) = \dfrac{2k'x(2-x) - k(2-2x)}{2(x(2-x))^{3/2}} \Rightarrow k'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$
$\Rightarrow k(x) = arccos(x-1) \Rightarrow y(x) = \dfrac{k + arccos(x-1)}{\sqrt{x(2-x)}}$

XII. BE 2006

On considère les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x) = 0 & (E_1) \\ x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - a)y(x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

1°. On suppose que $y(x)$ est solution de E_1. Démontrer qu'alors $u(x) = \sqrt{x} \times y(x)$ est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra.

$u = \sqrt{x}y \Rightarrow y = \dfrac{u}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{x}} - \dfrac{u}{2x\sqrt{x}}$
$\Rightarrow y'' = \dfrac{u''}{\sqrt{x}} - \dfrac{u'}{x\sqrt{x}} + \dfrac{3u}{4x^2\sqrt{x}}$
En injectant dans l'équation E_1, il vient :
$x\sqrt{x}u'' - \sqrt{x}u' + (3/4)u/\sqrt{x} + \sqrt{x}u' - u/(2\sqrt{x}) + ...$
$... + (x^2 - 1/4)u/\sqrt{x} = x\sqrt{x}(u'' + u) = 0$
$\iff u'' + u = 0$
Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$
Les solutions sont $u(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ et l'on déduit

2°. $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$

3°. Parmi ces solutions, quelles sont celles pour lesquelles $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x)$ existe ?

$\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0 \iff y(x) = \beta\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

4°. Calculer ces fonctions et montrer que $z(x)$ est solution de E_2 pour une certaine valeur de a.

On effectue une intégration par parties. Après calculs, il vient $v(x) = -x\cos x + \sin x \Rightarrow z(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sqrt{x}}$

$z'(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{3(\sin x - x\cos x)}{2x^{5/2}}$
$z''(x) = -2\dfrac{\sin x}{x^{3/2}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} + \dfrac{15(\sin x - x\cos x)}{4x^{7/2}}$
Ainsi, $x^2z'' + xz' + (x^2 - a)z =$... calculs...
$= (9 - 4a)\dfrac{\sin x - x\cos x}{4x^{3/2}} = 0$ ssi $a = 9/4$

XIII. BE 2007

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -8t^2 & (E_1) \\ y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -9e^{-2t} & (E_2) \end{cases}$$

1°. Résoudre E_1, puis E_2.
2°. Déterminer les solutions de E_1 vérifiant $y(0) = 0$
3°. Déterminer la solution de E_2 vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$

1°. L'équation homogène commune associée à E_1 et E_2 est $y'' + y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est donc $r^2 + r - 2 = 0$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 \geq 0$ et il y a donc deux racines $r = -2, 1$.

D'après le cours, la solution de l'équation homogène est donc de la forme $z(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Nous devons maintenant chercher une solution particulière pour chacune des deux équations.

Commençons par E_1. On va chercher $y_0(t)$ sous la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$. En effet, le second membre de E_1 est de la forme $P_n(t)e^{kt}$ avec P_n polynôme de degré 2 (ici c'est $-8t^2$) et $k = 0$ puisque l'exponentielle n'apparait pas. Comme 0 n'est pas solution de l'équation caractérisitique, alors la solution particulière pourra être cherchée sous la forme $Q_n(t)e^{kt}$ où Q_n est un polynôme de degré deux.

Il reste maintenant à déterminer les coefficients a, b, c. Pour cela, dérivons $y_0(t)$ une fois, deux fois et injectons les expressions trouvées dans l'équation avec second membre (puisque $y_0(t)$ est solution, elle doit satisfaire l'équation) :

$y_0'(t) = 2at + b$ et $y_0''(t) = 2a$.
En injectant dans E_1, il vient :
$2a + (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = -8t^2$

Or, deux polynômes sont égaux ssi tous les coefficients sont égaux. On doit donc avoir $-2a = -8$, soit $a = 4$, $2a - 2b = 0$, soit $b = a = 4$ et $2a + b - 2c = 0$, soit $c = 6$. La solution particulière cherchée est donc $y_0(t) = 4t^2 + 4t + 6$.

La solution générale de l'équation E_1 est donc
$y(t) = z(t) + y_0(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} + 4t^2 + 4t + 6$

Attaquons-nous maintenant à E_2. Le second membre est de la forme $P_n(t)e^{kt}$ où P_n est un polynôme de degré 0 (c'est une constante) et $k = -2$. Contrairement à l'équation précédente, $k = -2$ est solution simple de l'équation caractéristique et d'après le cours, il faut donc chercher $y_0(t)$ sous la forme $y_0(t) = t \times a \times e^{-2t}$.

$y_0'(t) = ae^{-2t} - 2ate^{-2t}$
$y_0''(t) = (-4a + 4at)e^{-2t}$

On injecte dans l'équation E_2 :
$(-4a + 4at)e^{-2t} + (a - 2at)e^{-2t} - 2ate^{-2t} = -9e^{-2t}$

On simplifie par e^{-2t} et l'on a donc à identifier deux polynômes de degré 1. Les termes de degré 1 s'annulent et l'on obtient $a = 3$.

$y_0(t) = 3te^{-2t}$ et
$y(t) = z(t) + y_0(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} + 3te^{-2t}$

2°. $y(0) = 0 \Rightarrow \alpha + 6 = 0$. Ainsi $\alpha + \beta = -6$, donc $\beta = -6 - \alpha$ et les solutions de E_1 s'expriment alors en fonction d'une unique constante.

3°. $y(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$
$y'(t) = \alpha e^t + 2\alpha e^{-2t} + 3e^{-2t} - 6te^{-2t}$
$y'(0) = 3\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$
La seule solution de E_2 qui satisfait les deux conditions est donc $-e^t + e^{-2t} + 3te^{-2t}$

XIV.

On souhaite résoudre l'équation différentielle
$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos(2x) \quad (\star)$

1°. Montrer que la fonction
$y_0(x) = \dfrac{1}{8}\left[\cos(2x) + 2x\sin(2x)\right]e^{-x}$ est solution de $(\star)$

Il suffit de dériver deux fois y_0, d'injecter dans l'équation et de constater qu'elle est vérifiée.

2°. En déduire toutes les solutions de l'équation initiale.

La fonction y_0 est solution particulière, il ne nous reste qu'à déterminer les solutions de l'équation homogène et d'jouter le deux :

$$y(x) = e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x) + \frac{1}{8}(\cos(2x) + 2x\sin(2x))\right)$$

Applications

XV. Circuit RLC

Loi d'ohm et de Lenz

Rappelons la loi d'Ohm qui indique qu'aux bornes d'une résistance,

$$v(t) = Ri(t)$$

où R est la résistance, $v(t)$ la tension aux bornes et $i(t)$ le courant qui traverse la résistance. Aux bornes d'une inductance, la loi de Lenz donne par ailleurs

$$v(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

où L est la valeur de l'inductance. Enfin, aux bornes d'un condensateur,

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{1}{C}i(t)$$

où C est la valeur de la capacité.

Cellule RC

Considérons la figure ci-dessous qui représente un montage RC en série. $e(t)$ est la tension à l'entrée de la cellule et $v(t)$ est la tension aux bornes du condensateur. Il s'agit d'étudier $v(t)$ en fonction de $e(t)$.

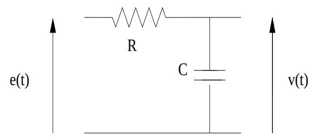


Figure 1 – Cellule RC

1°. Démontrer que l'équation qui pilote ce circuit est donnée par

$$RC\frac{d}{dt}v(t) + v(t) = e(t)$$

D'après la loi des noeuds,
$e(t) = V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow e(t) = Ri(t) + v(t) = RC\frac{dv}{dt}(t) + v(t)$

2°. Résoudre l'équation homogène associée.

$RCv' + v = 0 \iff \frac{v'}{v} = -\frac{1}{RC} \Rightarrow v(t) = ke^{-t/RC}$

3°. On suppose que $e(t) = V$ est une tension constante au cours du temps. Par ailleurs, le condensateur impose à la tension d'être continue à ses bornes, de sorte que $v(0) = 0$

Utilisons la méthode de la variation de la constante :
$v'(t) = k'e^{-t/RC} - \frac{k}{RC}e^{-t/RC} \Rightarrow RCk'e^{-t/RC}$
$\Rightarrow k' = \frac{V}{RC}e^{t/RC} \Rightarrow Ve^{t/RC} \Rightarrow v(t) = ke^{-t/RC} + V$.
Par ailleurs, $v(0) = 0 \Rightarrow k = V$ donc
$v(t) = V(1 - e^{-t/RC})$
La solution de l'équation homogène représente le régime transitoire qui tend rapidement vers 0 et la solution particulière V représente le régime permanent.

4°. La constante de temps du circuit est $\tau = RC$ qui s'exprime en secondes. Quelle est sa signification ?

$v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. Lorsque $t = \tau$, le condensateur est chargé au 2/3 environ et lorsque $t = 3\tau$, il est chargé à 95% : τ donne la vitesse de chargement du condensateur. On peut aussi voir ce facteur comme l'inertie électrique du circuit.

5°. Examinons l'expression du courant $i(t)$, par exemple lorsque celui-ci traverse le condensateur ; on a alors $i(t) = C\frac{du}{dt}(t) = \frac{V}{R}e^{-t/(RC)}$. On rappelle que $i = dq/dt = i_0e^{-t/(RC)}$

6°. Le courant qui traverse la résistance a la même expression que ci-dessus. Ainsi,
$W = \int_0^{+\infty} Ri(t)^2dt = \frac{V^2C}{2}$
qui représente l'effet de Joule dans la résistance pendant la charge du condensateur.

7°. Nous utilisons à nouveau la méthode de la variation de la constante. Après calculs, on obtient l'équation $k(t) = \int e^{t/\tau}\cos(\omega t)dt$. Une double intégration par parties permet d'obtenir comme résultat
$k(t) = \frac{\omega^2\tau^2V}{V + \omega^2\tau^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega^2\tau}\cos(\omega t)\right)$
Ainsi, la solution générale peut se mettre sous la forme
$ke^{-t/\tau} + \frac{(\omega\tau)^2V}{V + (\omega\tau)^2}(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega^2\tau}\cos(\omega t))$.
La condition initiale $v(0) = V$ donne alors la valeur de k, ie $k = V(1 + \tau/(V + \omega^2\tau^2))$

Circuit RLC

Considérons la figure ci-dessous qui représente un montage RLC. $e(t)$ est à nouveau la tension à l'entrée du circuit et $v(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

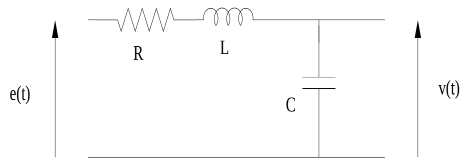


Figure 2 – Circuit RLC

1°. Démontrer que l'équation qui pilote ce circuit est donnée par

$$LC\frac{d^2}{dt^2}v(t) + RC\frac{d}{dt}v(t) + v(t) = e(t)$$

Là aussi, on applique la loi des noeuds pour obtenir
$e(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$
$= RC\frac{dv}{dt}(t) + LC\frac{d^2v}{dt^2}(t) + v(t)$
Nous noterons $(*)$ cette équation.

2°. En posant $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ qui est la pulsation du circuit et $\alpha = \frac{R}{2L}$ qui est le facteur d'amortissement, établir l'équation homogène associée.

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (que l'on sait donc résoudre !) dont l'équation homogène à pour équation caractéristique
$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0$
$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega^2)$

3°. Résoudre cette équation dans les trois cas $\alpha > \omega$, $\alpha < \omega$ et $\alpha = \omega$.

$\boxed{\alpha > \omega}$ En ce cas $\Delta > 0$ et il y a deux racines $r_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$ et $r_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. On a alors $z(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{\alpha = \omega}$ $r = -\alpha$ est racine double et $z(t) = (at + b)e^{-\alpha t}$

$\boxed{\alpha < \omega}$ Il y a deux racines complexes $-\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ donc $z(t) = e^{-\alpha t}(a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t))$ et $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} > 0$

Dans tous les cas, la solution particulière dépend de la forme de $e(t)$ que l'on ne connait pas. On ne peut donc pas aller plus loin dans la résolution.

4°. On suppose que $e(t) = E$ est constante au cours du temps. La tension devant être continue aux bornes du condensateur, $v(0) = 0$; de même, l'intensité dans l'inductance devant être continue $\frac{\partial}{\partial t}v(0) = 0$. Enfin, après un temps suffisamment long, le régime permanent du circuit impose $\lim_{t\to+\infty} v(t) = E$

$e(t) = E$ et l'on constate que E satisfait $(*)$ donc que $y_0(t) = E$, ie $y(t) = z(t) + E$

$\boxed{\alpha > \omega}$
$v(0) = 0 \Rightarrow a + b + E = 0$ et
$v'(0) = 0 \Rightarrow r_1 a + r_2 b = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{r_1}{r_2}a$ ie
$v(t) = E(1 + \dfrac{r_2}{r_2 - r_1}e^{r_1 t} + \dfrac{r_1}{r_2 - r_1}e^{r_2 t})$

$\boxed{\alpha = \omega}$
De la même façon, $v(t) = E(1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t})$

$\boxed{\alpha < \omega}$
$v(t) = E\left[1 - e^{-\alpha t}(\cos(\lambda t) + \dfrac{\alpha}{\lambda}\sin(\lambda t))\right]$

XVI. Circuit RL

Un circuit formé d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R montées en série est alimenté par une tension $e(t)$. On admet que l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit est solution de l'équation différentielle

$$L\frac{di}{dt}(t) + R\,i(t) = e(t)$$

On supposera $i(t)$ dérivable et $i(0) = 0$

1°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = E$, constante indépendante du temps.

On commence par résoudre l'équation homogène associée : $i' + R/Li = 0$ dont les solutions sont $i(t) = k\exp(-Rt/L)$
Une solution particulière est alors donnée par la fonction constante E/R.
Enfin, $i(0) = 0$ impose $k = -E/R$ d'où la solution :

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

2°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = \sin(\omega t)$, avec $\omega > 0$ représentant la pulsation du circuit.

L'équation homogène est la même et pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante. Après calculs (assez longs), on obtient :

$$i(t) = \frac{1}{R^2 + (L\omega)^2}\left[R\sin(\omega t) + L\omega(e^{-Rt/L} - \cos(\omega t))\right]$$

XVII. Equation de Schrödinger

1°. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Si $V(x)$ est constant, cette équation est à coefficients constants et peut se résoudre en utilisant l'équation caractéristique. A l'extérieur de l'intervalle $[0, L]$, $V(x)$ est infini et la fonction $\psi(x)$ ne peut être qu'égale à 0. Si $x \in [0, L]$, $V(x) = 0$, et l'équation devient $\psi''(x) + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$. En posant $\lambda = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, l'équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$ et donc $\psi(x) = \alpha\cos(\lambda x) + \beta\sin(\lambda x)$

2°. $\psi(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ et $\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda L) = 0$
$\Rightarrow \lambda L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \dfrac{2mE}{\hbar^2} = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ soit $E = \dfrac{n^2h^2}{8mL^2}$.
L'énergie ne peut donc prendre qu'un nombre discret de valeurs. On dit qu'elle est quantifiée.

3°. Si $-a < x < a$, l'équation est
$\psi''(x) + \dfrac{2m}{\hbar^2}(V + E)\psi(x) = 0$
De la même façon que si dessus, en posant $\lambda = \sqrt{2m(E + V)}/\hbar$, on a comme solution $\psi(x) = \alpha\cos(\lambda x) + \beta\sin(\lambda x)$
si $x < -a$ ou $x > a$, l'équation devient
$\psi''(x) - \dfrac{2m|E|}{\hbar^2}\psi(x) = 0$ dont les solutions sont de la forme $\alpha' e^{\mu x} + \beta' e^{-\mu x}$ avec $\mu = \sqrt{2m|E|}/\hbar$

XVIII. Désintégration d'atomes radioactifs

1°. Pour trouver l'équation différentielle, il suffit de remarquer que le nombre de désintégration représente la variation du nombre d'atomes, ie $N'(t)$. Ainsi, $N'(t) = -\lambda N(t)$.

2°. Il s'agit d'une équation à variables séparables. On a $N'/N = -\lambda \Rightarrow \ln N = -\lambda t + K \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

3°. Par définition de T, $N(t + T) = N(t)/2$
$\Rightarrow N_0 e^{-\lambda(t+T)} = N_0 e^{-\lambda t}/2 \Rightarrow e^{-\lambda T} = 1/2$
$\lambda T = \ln 2 \Rightarrow T = \dfrac{1}{\lambda}\ln 2$

4°. $\alpha(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

5°. $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = 1,2.10^{-4}$. Nous cherchons $\dfrac{N(t + 10^4)}{N(t)} = \exp(-1,2) \simeq 30\%$. De la même façon, si le fossile a 10^5 ans, la fraction vaut $\exp(-12) \simeq 0,0006\%$

XIX. Modèle de croissance d'une population

1°. L'équation est quasiment la même que ci-dessus : $N'(t) = \lambda N(t)$ et l'on a donc $N(t) = e^{\lambda t}$

2°. On a facilement $N'(t) = rN(t)$ de sorte que $N(t) = N_0 e^{rt}$

3°. Il ne s'agit pas d'une équation linéaire et nous ne pouvons donc la résoudre par la méthode habituelle. Par contre, l'équation différentielle peut s'écrire $\frac{N'}{N(K-N)} = \lambda$
Décomposons en éléments simples la fraction $\frac{1}{N(K-N)}$
Nous obtenons $\frac{1}{N(K-N)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right)$
Ainsi, l'équation devient $\frac{N'}{N} + \frac{N'}{K-N} = \lambda K$ que nous pouvons intégrer.
$\iff \ln|N| - \ln|k - N| = \lambda Kt + cte$
$\iff \ln\frac{N}{K-N} = \lambda Kt + cte \iff \frac{N}{K-N} = \alpha e^{\lambda Kt}$
$\iff N = K\alpha e^{\lambda Kt} - N\alpha e^{\lambda Kt} \iff N(t) = \dfrac{K}{1 + \frac{1}{\alpha}e^{-\lambda Kt}}$
Pour déterminer la valeur de la constante α, calculons $N(t)$ à $t = 0$:

$N(0) = K/(1+1/\alpha) \Rightarrow 1/\alpha = K/N(0) - 1$. Nous obtenons alors la formule logistique.

$$\Rightarrow N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N(0)} - 1)e^{-\lambda K t}}$$

$N(0)$ représente la population initiale et K est le facteur biotique. Nous allons voir que K représente également la population limite lorsque $t \to +\infty$

$\boxed{\text{si } 0 < K < N(0)}$

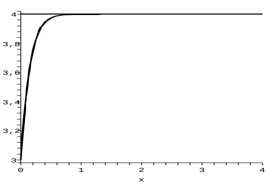
alors le facteur entre paranthèse au dénominateur est < 0 et l'exponentielle tend vers 0 en l'∞. Ainsi,
$\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = K$

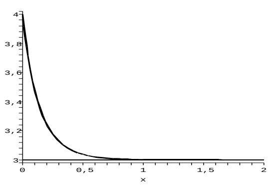
$\boxed{\text{si } K > N(0)}$

le facteur est positif, l'exponentielle tend toujours vers 0 donc $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = K$

$\boxed{\text{si } K < 0}$

en ce cas, l'exponentielle tend vers l'infini et la population limite tend donc vers 0. Les figures ci-dessous résument les différents cas.



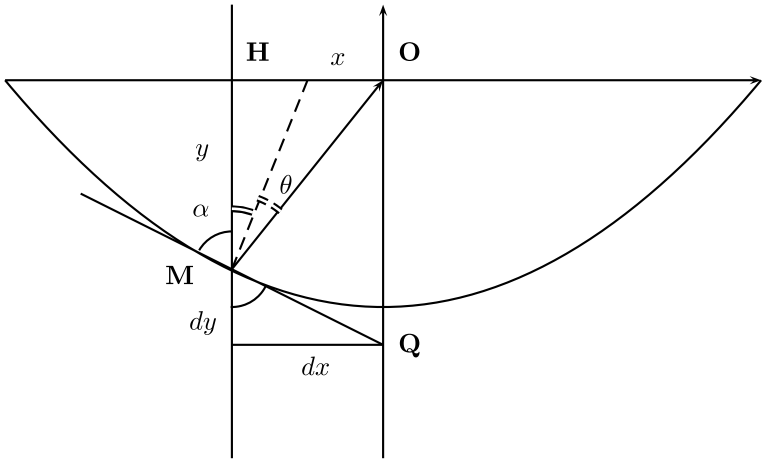


4°. Posons, comme indiqué, $u(t) = \ln N(t)$
$\Rightarrow u'(t) = N'(t)/N(t) \Rightarrow N/N' = -r\ln N + r\ln K$
$\Rightarrow u' + ru = r\ln K$ Nous aboutissons à une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants (que nous savons donc résoudre). L'équation homogène associée est $u' + ru = 0$ et a pour solution Ae^{-rt}. Par ailleurs, la fonction constante $\ln K$ est solution particulière évidente et la solution générale de l'équation avec second membre est donc $u(t) = Ae^{-rt} + \ln K$ et
$N(t) = \exp\left(Ae^{-rt} + \ln K\right) = Ke^{Ae^{-rt}}$ Par ailleurs, $N(0) = Ke^{A} \Rightarrow A = \ln(N(0)/K)$
L'allure de la courbe est similaire à celle de la fonction logistique.

XX. Antenne parabolique

1°. Dans le triangle MHO rectangle en H, $\tan 2\theta = x/y$. Construisons un triangle de côté (HM) et (MQ) en choisissant le troisième côté parallèle à $(0x)$. Si l'on note dy la longueur du côté vertical, alors puisque la pente de la tangente en $M(x,y)$ est $f'(x) = dy/dx$, le côté horizontal aura pour longueur dx. Ainsi, $\tan\alpha = dx/dy$

2°. Toujours par construction, $\alpha + \theta = \pi/2$. Ainsi, $\tan\theta = \tan(\pi/2 - \alpha) = 1/\tan\alpha \Rightarrow \tan\theta = dy/dx = y'$



3°. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2y'}{1-y'^2} = x/y$
$\Rightarrow 2yy' = x(1-y'^2) \Rightarrow xy'^2 + 2yy' - x = 0$
$\Delta = 4y^2 + 4x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\left(1 \pm \sqrt{x^2+y^2}\right)$
Il y a deux possibilités ; parmi ces deux possibilités, seule une équation va convenir. En effet, si $x < 0$, alors on doit avoir $y' < 0$ afin que le rayon incident se dirige vers O. A l'inverse, si $x > 0$, alors on doit avoir $y' > 0$ pour la même raison. La seule équation qui satisfait ces deux conditions est $y' = \dfrac{1}{x}\left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

4°. $y' = (\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + (\dfrac{y}{x})^2})$ est une équation différentielle homogène (cf. exercice III.1°) ; on effectue donc un changement de variable en posant $u = y/x$ de sorte que $y' = u'x + u$. En injectant dans l'équation, il vient
$u'x + u = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{1}{x}$
La primitive de $u'/\sqrt{1+u^2}$ est $argsh\ u$. En intégrant, on a donc $u(x) = sh(\ln x + C)$1,3)
$\Rightarrow u(x) = (e^{\ln x + C} - e^{-\ln x - C})/2 = (Kx - 1/(Kx))/2$

$\boxed{\Rightarrow y(x) = kx^2 - \dfrac{1}{k}}$

Il s'agit de l'équation d'une famille de paraboles dont le foyer est en O et dont l'axe est (Oy)

XXI. Loi de refroidissement de Newton

1°. La lecture de l'énoncé donne immédiatement l'équation différentielle $\theta'(t) + \alpha\theta(t) = 0$ qui est linéaire d'ordre 1 et dont les solutions s'écrivent sous la forme $\theta(t) = 100\exp(-\alpha t)$

2°. L'équation à résoudre est $\theta'(t) = -\alpha(\theta(t) - u(t))$
$\Rightarrow \theta'(t) + \alpha\theta(t) = \alpha u(t) = 100\alpha - 90\exp(-\beta t)$ La solution de l'équation homogène est $k\exp(-\alpha t)$. Le second membre s'écrit comme somme de deux fonctions usuelles simples. On a donc intérêt à séparer l'équation en deux et à résoudre :

$$\begin{cases} \theta'(t) + \alpha\theta(t) = 100\alpha & E_1 \\ \theta'(t) + \alpha\theta(t) = -90\alpha\exp(-\beta t) & E_2 \end{cases}$$

Une solution particulière de E_1 est la fonction constante 100 et une solution particulière de E_2 sera de la forme $\lambda\exp(-\beta t)$. Après calcul, on trouve $\lambda = 90\alpha/(\beta - \alpha)$ de sorte que la solution générale de l'équation initiale est

$$\theta(t) = ke^{-\alpha t} + 100 + \frac{90\alpha}{\beta - \alpha}e^{-\beta t}$$

Par ailleurs, à $t = 0$, $\theta(0) = 100 \Rightarrow k = -90\alpha/(\beta - \alpha) \Rightarrow$

$$\theta(t) = \frac{90\alpha}{\beta - \alpha}\left(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\right) + 100$$

3°. La température ambiante est atteinte lorsque $\theta'(t) = 0 \Rightarrow 90\alpha/(\beta-\alpha)\left[-\beta e^{-\beta t} + \alpha e^{-\alpha t}\right] = 0$
$\Rightarrow \exp((\alpha-\beta)t) = \alpha/\beta$ ie $t = \dfrac{\ln\alpha - \ln\beta}{\alpha - \beta}$
En remplaçant par les valeurs numériques $\alpha = 0,002$ et $\beta = 0,06$, on obtient $t = 58' \simeq 1$ heure. En remplaçant alors dans l'équation de $\theta(t)$, on obtient $\theta(58) \simeq 20°C$.

XXII. Pression atmosphérique

1°. L'élément de volume de hauteur dz et de surface S est soumis à son poids $m\vec{g}$ et aux forces de pression du gaz $\vec{F}(z+dz) = -S.P(z+dz).\vec{k}$ et $\vec{F}(z) = S.P(z).\vec{k}$. Le gaz étant en équilibre, le principe fondamental de la dynamique donne : $-mg + S.P(z) - S.P(z+dz) = 0$
Par ailleurs, le poids s'exprime à l'aide de la masse volumique : $mg = \rho Sgdz \Rightarrow \dfrac{dP}{dz} = -\rho g$

2°. En intégrant l'équation ci-dessus, il vient
$P(z) = P_0 + \rho gz$

3°. D'après la loi des gazs parfaits, $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{MP}{RT}$ de sorte que $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT}dz \Rightarrow \ln P = -\dfrac{Mg}{RT}z + cte$
$\Rightarrow P(z) = P_0\, e^{-\frac{Mg}{RT}z}$. En notant $H = \frac{RT}{Mg}$ on obtient $P(z) = P_0 e^{-z/H}$. $H \simeq 8km$ et s'appelle le facteur d'échelle ; c'est l'altitude à laquelle la pression est divisée par e par rapport à la pression atmosphérique au niveau de la mer.

XXIII. Décantation de l'eau

1°. La poussée d'Archimède a pour intensité $V\mu$ et est dirigée vers le haut. Le poids a pour intensité $mg = V\mu_s g$ et est dirigé vers le bas. La particule coule lorsque le poids est supérieur à la poussée d'Archimède, c'est à dire si $mg > V\mu \Rightarrow g > \mu/\mu_s$ ie $\boxed{g > 1/d}$

2°. $\sigma\vec{F} = m\vec{\gamma} \iff \dfrac{V\mu}{V\mu_s} + \dfrac{6\pi\mu\nu R}{V\mu_0}x' - \dfrac{V\mu_0 g}{V\mu_0} = -x''$
$\iff x'' + \dfrac{6\pi\nu R}{Vd}x' + (1/d - g) = 0$

3°. Cette équation est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation homogène est $x'' + \dfrac{6\pi\nu R}{Vd}x' = 0$ et possède comme équation caractéristique $r^2 + \dfrac{6\pi\nu R}{Vd}r = r(r + \dfrac{6\pi\nu R}{Vd}) = 0$
La solution de l'équation homogène est donc de la forme $\alpha + \beta\exp(-\dfrac{6\pi\nu R}{Vd}t)$
Une solution particulière évidente est $\dfrac{Vd}{6\pi\nu R}(g - 1/d)t$
La solution générale de l'équation avec second membre est

$$x(t) = \alpha + \beta\exp(-\frac{6\pi\nu R}{Vd}t) + \frac{Vd}{6\pi\nu R}(g - 1/d)t$$

La vitesse de la particule est la dérivée de cette fonction :

$$x'(t) = -\beta\frac{6\pi\nu R}{Vd}e^{\bullet} + \frac{Vd}{6\pi\nu R}(g - 1/d)$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = \dfrac{Vd(g - 1/d)}{6\pi\nu R}$

En utilisant le fait que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, il vient enfin

$$v_L = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\nu}(gd - 1)$$

La vitesse limite est également la vitesse atteinte lorsque les forces de frottements compensent le poids de la particule. En égalant les deux, on retrouve la formule ci-dessus.

4°. Le calcul donne $v_L = 1cm/s$ pour des particules de $50\mu m$, $v_L = 0,01cm/s$ pour $5\mu m$ et $v_L = 10^{-4}cm/s$

5°. le nombre d'ions positifs par unité de volume est $nZe \times \exp(-\dfrac{ZeV(x)}{kT})$ et le nombre d'ions négatifs par unité de volume est $nZe \times \exp(\dfrac{ZeV(x)}{kT})$. La charge volumique $\rho(x)$ sera donc
$\rho(x) = nZe \times \exp(-\dfrac{ZeV(x)}{kT}) - nZe \times \exp(\dfrac{ZeV(x)}{kT})$
$\Rightarrow \rho(x) = -2nZe \times sh(\dfrac{ZeV(x)}{kT})$
Appliquons alors l'équation de Poisson-Boltzmann :
$E(x) = dV(x)/dx$ et $dE/dx = -\rho/\epsilon \Rightarrow \dfrac{d^2V(x)}{dx^2} = -\dfrac{\rho(x)}{\epsilon}$
$\Rightarrow V''(x) - \dfrac{2nZe}{\epsilon}sh\left(\dfrac{ZeV(x)}{kT}\right) = 0$

6°. De $sh\ x \sim x$ au voisinage de 0, on en déduit que $sh\left(\dfrac{ZeV(x)}{kT}\right) \sim \dfrac{ZeV(x)}{kT}$ et l'éuqation devient alors $V''(x) - V(x)/\lambda^2 = 0$ qui est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants. Les solutions sont de la forme $V(x) = \alpha\exp(x/\lambda) + \beta\exp(-x/\lambda)$. $V(x)$ étant nul en l'infini, on doit avoir $\alpha = 0$ d'où
$V(x) = V_0\exp(-x/\lambda)$ où V_0 est le potentiel au voisinage de la surface.

7°. L'équation à résoudre est
$V''(x) = \dfrac{2nZe}{\epsilon}sh\left(\dfrac{ZeV(x)}{kT}\right)$
Cette équation n'est pas linéaire. En multipliant les deux membres par $V'(x)$ et en intégrant, on otient
$\dfrac{1}{2}V'(x)^2 = \dfrac{4nkT}{\epsilon}ch\left(\dfrac{Ze}{kT}V(x)\right) + cte$
Le potentiel et le champ électrique étant nul à l'infini, $0 = \dfrac{4nkT}{\epsilon} + cte$ de sorte que $cte = -(4nkT)/\epsilon$ Par ailleurs, $E(x) = dV(x)/dx$, donc
$E(x)^2 = V'(x)^2 = \dfrac{4nkT}{\epsilon}\left(ch(\dfrac{ZeV(x)}{kT}) - 1\right)$
$E(x)^2 = \dfrac{8nkT}{\epsilon} \times sh^2(\dfrac{ZeV(x)}{2kT})$

$$\boxed{E(x) = \sqrt{\frac{8nkT}{\epsilon}} \times sh(\frac{ZeV(x)}{2kT})}$$

8°. L'équation précédente peut s'écrire
$\dfrac{V'(x)}{sh(\frac{ZeV(x)}{2kT})} = \sqrt{\dfrac{8nkT}{\epsilon}}$
$\Rightarrow \ln\left|th\left(\dfrac{ZeV(x)}{4kT}\right)\right| = Ze\sqrt{\dfrac{n}{2\epsilon kT}}x$ On en déduit
$V(x) = \dfrac{4kT}{Ze} \times argth\,(\bullet\bullet)$

XXIV. Suspension colloïdale

Correction disponible à mon bureau sur demande.

XXV. Trajectoire d'un projectile

1°. L'objet n'est soumis qu'à son poids ; le principe fondamental de la dynamique donne $mg = mx''(t)$ soit $x''(t) = g$. En intégrant, on a $x'(t) = gt + cte$ et la constante est nulle car la vitesse initiale est $x'(0) = 0$. En intégrant à nouveau, on a $x(t) = gt^2/2 + cte$ et la constante est à nouveau nulle car l'origine du repère est fixée en $x(0)$. Ainsi, $\boxed{x(t) = gt^2/2}$

$x(t)$ et $x'(t)$ ne dépendent pas de m de sorte qu'en négligeant les forces de frottement, deux objets identiques mais de masses différentes tombent à la même vitesse.

2°. En tenant compte des forces de frottement, l'équation devient $mg - \lambda x'(t) = mx''(t)$ soit encore $x''(t) + (\lambda/m) \times x'(t) = g$. Il s'agit d'une équation du second degré dont l'équation caractéristique est $r^2 + (\lambda/m)r = 0$. La solution de l'équation homogène est $x(t) = \alpha + \beta e^{-(\lambda/m)t}$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est clairement mgt/λ ; la solution générale est donc de la forme $x(t) = \alpha + \beta e^{-(\lambda/m)t} + mgt/\lambda$

De $x(0) = 0$ on tire $\alpha = -\beta$ et de $x'(0) = 0$ on tire $\alpha = -m^2g/\lambda^2$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = -\frac{m^2}{\lambda^2}g(1 - e^{-\lambda t/m}) + \frac{mg}{\lambda}t}$$

On s'aperçoit sur cette formule que $x'(t) = \frac{mg}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t/m})$ est proportionnelle à m. En ce cas, l'objet le plus massif touche terre en premier. Par ailleurs, lorsque $t \to +\infty$, $x'(t)$ tend vers mg/λ qui donne la vitesse limite de l'objet.

3°. Le projectile est uniquement soumis à son poids (dirigé vers le bas). La relation fondamentale de la dynamique donne $m\vec{\gamma} = m\vec{g}$. La projection de cette relation sur l'axe des x donne $mx''(t) = 0$ et sa projection sur l'axe des y donne $my'' = -mg$. En intégrant la première relation, il vient $x'(t) = cte = v_0 \cos\alpha$ puis $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$. En intégrant deux fois la seconde relation, il vient $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$

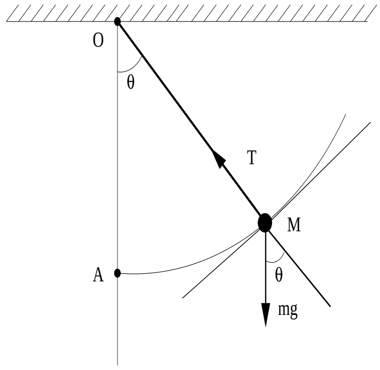
4°. Nous cherchons une relation du type $y = f(x)$. Exprimons t en fonction de x : $t = x/(v_0 \cos\alpha)$. En injectant cette relation dans l'expression de $y(t)$, on obtient :

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha \times x}$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole. La portée du tir s'obtient en résolvant $y(x) = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré avec deux solutions, $x = 0$ et $x = 2v_0^2 \sin(2\alpha)/g$. Cette portée est maximale lorsque l'on choisit $\alpha = \pi/4$ et vaut alors $2v_0^2/g$

XXI. Mouvement d'un pendule

La première étape est de faire un schéma soigné. La masse à l'extrémité du pendule est soumise à la tension du fil (dans la direction du fil et dirigée vers O) et au poids mg dirigé vers le bas.



::

1°. Etablir le bilan des forces et appliquer le principe fondamental de la dynamique. Projeter la relation obtenue sur la tangente en $M(t)$ à la trajectoire de la masse.

La relation fondamentale donne $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$. En projetant sur la tangente, $\vec{T}$ s'annule et l'équation devient :

$-mg\sin\theta = mx'' \iff x'' + g\sin\theta = 0$

2°. En déduire l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.

Maintenant, par définition, x étant la longueur d'un arc, on a $x = L\theta$ et en substituant dans l'équation, il vient $L\theta'' + g\sin\theta = 0$ qui est l'équation recherchée.

3°. En supposant que $\theta(t)$ reste petit, montrer que $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$

Comme $\sin\theta \overset{0}{\sim} \theta$, l'équation devient, pour θ petit, $L\theta'' + g\theta = 0$ qui est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

4°. Résoudre cette équation et en déduire la période des oscillations. Constater, comme l'a fait en premier Galilée au dix-septième siècle, que cette période T ne dépend ni de m ni de θ_0.

Posons $\lambda = \sqrt{g/L}$. L'équation caractéristique est $r^2 + \lambda^2 = 0$ dont les solutions sont $\pm i\lambda$. Les solutions sont donc de la forme $\theta(t) = \alpha\cos(\lambda t) + \beta\sin(\lambda t)$.
Dérivons : $\theta'(t) = -\lambda\alpha\sin(\lambda t) + \lambda\beta\cos(\lambda t)$
Comme le pendule est lâché sans vitesse initiale, $\theta'(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ et l'on en déduit que $\theta(t) = \alpha\cos(\lambda(t))$.
Enfin, à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)}$$

Il s'agit bien d'un mouvement périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$
qui ne dépend curieusement que de L et g.

5°. A partir de maintenant, nous ne supposons plus que θ est petit et nous revenons à l'équation initiale.
Nous posons $v(t) = L\theta'(t)$. Montrer que $\dfrac{d}{dt}(v^2/2) = Lg\dfrac{d}{dt}(\cos\theta)$

On a $L\theta'' = -g\sin\theta$ et $v = L\theta' \iff v^2/2 = \dfrac{L^2}{2}(d\theta/dt)^2$
$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(v^2/2) = L^2\theta'\theta'' = L\theta'(-g\sin\theta) = Lg\dfrac{d}{dt}(\cos\theta)$

6°. Montrer que $\displaystyle\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}t$ et justifier la convergence de cette intégrale.

Il suffit d'intégrer par rapport à t l'équation précédente : $v^2/2 = Lg\cos\theta + cte$ et $cte = -Lg\cos\theta_0$
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2Lg}}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$ si $\theta \neq \theta_0$
$\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \sqrt{\frac{2g}{L}}dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

La fonction sous l'intégrale est de la forme $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ avec $\alpha = 1/2$ et $a = \cos\theta_0$. L'intégrale converge donc.

7°. Montrer que
$T = 4\sqrt{\dfrac{L}{2g}} \displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\theta_0}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$
avec $k = \sin^2(\theta_0/2)$

On pose $t = T/4$ dans l'équation ci-dessus. Cet instant correspond au passage par la verticale et l'on a donc $\theta = 0$. La première égalité s'en déduit tout de suite. Ensuite, $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta_0/2)$ et en posant $\phi = u/2$ la seconde égalité apparaît.

8°. Démontrer que T est une fonction croissante de θ_0 et déterminer $\displaystyle\lim_{\theta_0 \to 0^+} T$

XXVII. Mouvement d'un ressort

On note g l'accélération de la pesanteur. Un ressort de masse négligeable et de constante de raideur $k > 0$ est fixé en un point. A l'autre extrémité de ce ressort est attachée une masse m. On choisit comme origine O du repère, la position au repos du ressort. On néglige dans un premier temps les forces de frottements. La masse est donc soumise à deux forces : son poids et la force de rappel du ressort. On rappelle que celle-ci est proportionnelle à l'allongement $x(t)$ du ressort (écart entre la position à t de la masse et la position au repos) et tend à ramener le ressort vers sa position d'équilibre. L'axe (Ox) est dirigé vers le bas et coïncide avec l'axe du ressort. On écarte la masse de sa position au repos, puis on la lâche sans vitesse initiale depuis cette position x_0, à l'instant $t = 0$.

1°. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour démontrer que $mx''(t) + kx(t) = mg$

On a $m\vec{\gamma} = \vec{T} + m\vec{g}$
En projetant sur l'axe (Ox), il vient
$mx''(t) = -kx(t) + mg$
Il est important de noter que $x(t)$ est une quantité algébrique (positive quand le ressort est étiré et négative sinon) et que la force de rappel est toujours de direction opposée.

2°. Résoudre cette équation différentielle. Démontrer que le mouvement est périodique et exprimer la période T en fonction de g, m et k. Déterminer la position d'équilibre en fonction de ces mêmes constantes.

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 dont l'équation homogène est $x'' + k/my = 0$. Posons $\omega = \sqrt{k/m}$. Alors les solutions de cette équation sont
$x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$
En dérivant puis en utilisant le fait que $x'(0) = 0$, on voit que $\beta = 0$ et finalement $x(t) = x_0\cos(\omega t)$

Il s'agit d'un mouvement périodique de période
$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
Une solution particulière de l'équation avec second membre est la fonction constante mg/k et la solution générale de l'équation est donc $x(t) = x_0\cos(\omega t) + mg/k$

On voit que l'on a donc un système qui oscille autour de la position au repos du ressort.

3°. On plonge maintenant la masse dans un liquide (eau, huile, etc.) afin de construire un amortisseur. La force de frottement créée est proportionnelle à la vitesse et sera toujours de direction opposée à celle-ci. On la notera $-cx'(t)$.
Déterminer l'équation différentielle pilotant ce système.

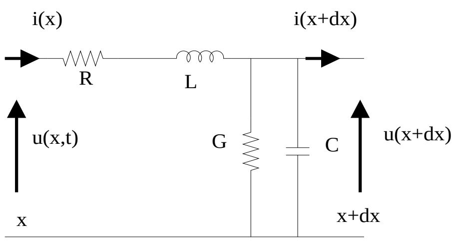
De la même façon que dans la question précédente, l'équatione est $mx'' + cx' + kx = mg$

4°. Démontrer que la forme des solutions dépend du signe de $c^2 - 4km$ et les expliciter dans les trois cas.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est $mr^2 + cr + k = 0$
$\Delta = c^2 - 4km$ qui est le paramètre recherché. Selon que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, on trouve les trois formes de solutions classiques.

XXVIII. Modèle d'une ligne de transmission

Une ligne de transmission (câble coaxial, fil de cuivre, ou autre) peut être considérée comme un circuit RLC : on considère une portion de ligne élémentaire de longueur infiniment petite dx.



On considère que la ligne est sans perte lorsque le signal n'y est pas atténué. On a alors $R = 0$ et $G = 0$. C'est dans ce cas que nous nous placerons par la suite.

1°. En utilisant la loi des mailles et la loi des noeuds pour les impédances complexes, démontrer que la tension complexe U et l'intensité complexe I (de pulsation ω) dans la portion de ligne considérée vérifient

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -LC\omega^2 U \quad ; \quad \frac{d^2I}{dx^2} = -LC\omega^2 I$$

2°. Résoudre ces équations différentielles et exprimer l'impédance $Z = U/I$ de la ligne en un point x de celle-ci.

3°. On suppose que le câble a une longueur l, qu'il débute par un récepteur d'impédance Z_e et se termine par un récepteur d'impédance Z_s. Démontrer que le signal dans le câble est la superposition de deux fonctions représentant une onde incidente et une onde réfléchie. Caractériser leur vitesse de propagation.

4°. Le coefficient de réflection du câble est le rapport des impédances réfléchies et incidentes. Calculer ce coefficient.

5°. Que se passe-t-il si la ligne est infinie ?

XXIX. Problème de la chaînette et ponts suspendus.

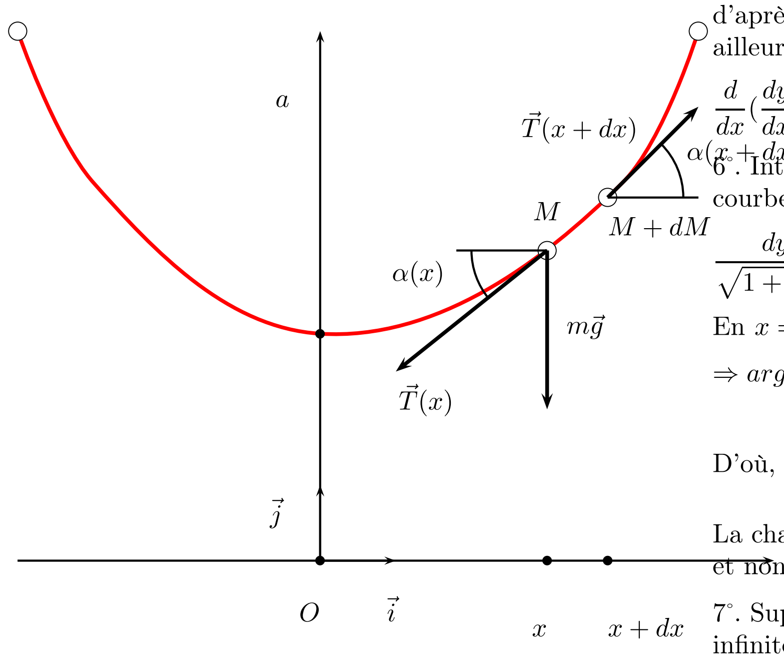
La chaînette est la forme que prend un fil suspendu entre deux points et soumis uniquement à son poids et à la tension du fil, en supposant que celui-ci est infiniment mince, homogène et sans raideur.

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé en choisissant O pour que le point le plus bas de la chaînette ait une abscisse nulle et l'on considère un élément infinitésimal de fil compris entre les points M d'abscisse x et $M+dM$ d'abscisse $x+dx$. L'abscisse curviligne entre M et $M+dM$ sera notée ds. Nous noterons g la constante de la gravitation universelle et λ la masse linéïque du fil (masse par unité de longueur) : Le poids de l'élément de fil est donc $m=\lambda ds$.

Soit $\vec{T}(x)$ la tension du fil en M d'abscisse x et $\vec{T}(x+dx)$ la tension en $M+dM$. Soit $\alpha(x)$ l'angle entre $\vec{T}$ et l'horizontale. On admettra que l'absence de raideur du fil assure que la tension $\vec{T}$ est tangente au fil en M.

Soit enfin T_0 l'intensité de la tension au point d'abscisse 0.

1°. Faire un dessin et appliquer le théorème fondamental de la statique pour démontrer que
$\vec{T}(x+dx)+\vec{T}(x)=\lambda g ds\vec{j}$



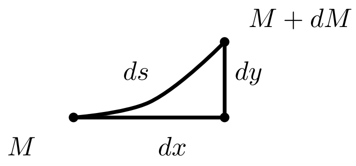
$$\sum \vec{F}=\vec{0} \iff -mg\vec{j}+\vec{T}(x)+\vec{T}(x+dx)=\vec{O}$$

2°. En projetant cette relation sur l'axe (Ox) démontrer que $T(x)\cos\alpha(x)=T_0$ est une constante indépendante de x.

Par construction,
$T(x+dx)\cos\alpha(x+dx)-T(x)\cos\alpha(x)=0$
Ainsi, $\dfrac{T(x+dx)}{T(x)}=\dfrac{\cos\alpha(x)}{\cos\alpha(x+dx)}=cte$
$\Rightarrow T(x)\cos\alpha(x)=T_0$

3°. En projetant sur (Oy) :
$T(x+dx)\sin\alpha(x+dx)-T(x)\sin\alpha(x)=mg=\lambda g ds$
$\Rightarrow \dfrac{T_0}{\cos\alpha(x+dx)}\sin\alpha(x+dx)-\dfrac{T_0}{\cos\alpha(x)}\sin\alpha(x)=\lambda g ds$
$\Rightarrow T_0(\tan\alpha(x+dx)-\tan\alpha(x))=\lambda g ds$

4°. Faire apparaître sur un dessin les quantités dx, dy et ds, puis démontrer que $\dfrac{d}{dx}(\tan\alpha(x))=\dfrac{\lambda g}{T_0}\dfrac{ds}{dx}$



Divisons la relation précédente par dx : il vient
$\dfrac{\tan\alpha(x+dx)-\tan\alpha(x)}{dx}=\dfrac{\lambda g}{T_0}\dfrac{ds}{dx}$
Lorsque dx tend vers 0, le membre de gauche tend vers $\dfrac{d}{dx}(\tan\alpha(x))$ et la relation apparaît.

5°. Posons $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Déduire de ce qui précède la relation
$\dfrac{d}{dx}(y')=\dfrac{\lambda g}{T_0}\sqrt{1+(y')^2}\ dx$
(On pourra considérer, en justifiant, que lorsque dx tend vers 0, $ds^2=dx^2+dy^2$)

Lorsque dx tend vers 0, l'abscisse curviligne ds de confond avec le segment $[M,M+dM]$ et l'on a donc, d'après le théorème de Pythagore, $ds^2=dx^2+dy^2$. Par ailleurs, $\tan\alpha(x)=dy/dx$. En remplaçant, on a :
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\lambda g}{T_0}\sqrt{dx^2+dy^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}(y')=\frac{\lambda g}{T_0}\sqrt{1+(y')^2}dx$$

6°. Intégrer cette équation et en déduire l'équation de la courbe $y=f(x)$ suivie par la chaînette.

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{\lambda g}{T_0}dx \Rightarrow argsh(y')=\frac{\lambda g}{T_0}x+cte$$

En $x=0$ la tension étant horizontale, on a $cte=0$ donc
$\Rightarrow argsh(y')=\dfrac{\lambda g}{T_0}x\Rightarrow y'=\sinh\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x\right)$

D'où, en intégrant à nouveau : $\boxed{y(x)=\dfrac{T_0}{\lambda g}\cosh\left(\dfrac{\lambda g}{T_0}x\right)}$

La chaînette a donc la forme d'un cosinus hyperbolique et non d'une parabole.

7°. Supposons maintenant que la masse d'un élément infinitésimal de fil ne soit plus égale à λds mais à λdx. Cela signifie que la masse est répartie horizontalement sur toute la longueur du fil. On suppose donc que le fil ne repose plus sur ses deux extrémités, mais que la suspension est répartie sur sa longueur. Dans ces conditions, déterminer l'équation de la courbe obtenue.

En ce cas, l'équation différentielle précédente devient $y'=\dfrac{\lambda g}{T_0}x$ qui s'intègre en $y(x)=\dfrac{\lambda g}{2T_0}x^2$ qui est bien l'équation d'un arc de parabole.