

## 1 Développements limités en 0 à l'ordre 3

$$\begin{array}{lllll}
 1^\circ. \sqrt{x+1} & 2^\circ. \frac{1}{\sqrt{x+1}} & 3^\circ. e^{-x} & 4^\circ. \operatorname{ch} x & 5^\circ. \operatorname{sh} x \\
 6^\circ. \operatorname{th} x & 7^\circ. \frac{1}{1+x^2} & 8^\circ. \arctan x & 9^\circ. \arcsin x & 10^\circ. \operatorname{argsh} x \\
 11^\circ. e^{\cos x} & 12^\circ. \ln(1+\sin x) & 13^\circ. \frac{x}{x^2-x+1} & 14^\circ. \ln(1-x+x^2) & 15^\circ. \frac{\sin x-1}{\cos x+1} \\
 16^\circ. x \sin x - \sin^2 x & 17^\circ. \frac{\arctan x}{x} & 18^\circ. \frac{1}{\cos x} & 19^\circ. e^{\operatorname{sh}(x)} & 20^\circ. \frac{x}{\sin x}
 \end{array}$$

## 2 Développements en $x \neq 0$

$$\begin{array}{lll}
 1^\circ. \sqrt{x} \text{ à l'ordre 2 en } x=1 & 2^\circ. \frac{\ln x}{x^2} \text{ à l'ordre 2 en } x=1 & 3^\circ. \sqrt{(x+1)(x+2)} \text{ à l'ordre 2 en } +\infty \\
 4^\circ. \tan x \text{ à l'ordre 3 en } x=\pi/4 & 5^\circ. (1+x)e^{\frac{1}{x}} \text{ à l'ordre 3 en } +\infty & 6^\circ. \arctan x \text{ à l'ordre 3 en } x=1
 \end{array}$$

## 3 Calculs de limites

$$\begin{array}{llll}
 1^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{sh} x - 2x}{x^5} & 2^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cos \frac{1}{x} - x) & 3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} & 4^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x \\
 5^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} & 6^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} & 7^\circ. \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} & 8^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \\
 9^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \frac{x-1}{x} & 10^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) & 11^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - e^{2x}} & 12^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x) \\
 13^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & 14^\circ. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x} & 15^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \\
 17^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} & 18^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) & 19^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{x+x^2}
 \end{array}$$

## 4 Etudier les branches infinies

$$\begin{array}{llllll}
 1^\circ. 3\sqrt{x^2+1} + 5x & 2^\circ. (1+x)e^{\frac{1}{x}} & 3^\circ. \frac{x^2-1}{x}e^{\frac{1}{x}} & 4^\circ. x^2 \ln \frac{x-1}{x} & 5^\circ. \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} & 6^\circ. e^{-1/x} \sqrt{1+x^2} \\
 7^\circ. e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2}
 \end{array}$$

## 5 Positions relatives de courbes

1°. Etudier la position relative, au voisinage de  $x=0$ , des courbes représentatives de  $\sin x$ ,  $\arctan x$  et  $\operatorname{argsh} x$ .

2°. Même question avec  $e^x$ ,  $\frac{2+x}{2-x}$  et  $\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$ .

## 6 Equation de tangente

Pour chacune des fonctions ci dessous, déterminer un développement limité au voisinage de 0 et en déduire une équation de la tangente en  $x=0$  ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

$$1^\circ. \begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad 2^\circ. \begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad 3^\circ. f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$$

## 7 Etude de courbes

**7.1**  $f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{1+x}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2°. Déterminer un développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en  $+\infty$ .
- 3°. En déduire les limites aux bornes et les branches infinies de la courbe de  $f$ .
- 4°. Etudier les variations de  $h$  (on pourra poser  $f'(x) = x \times h(x)$  et étudier la fonction  $h$ ).
- 5°. Déterminer la représentation graphique de  $h$ .

**7.2**  $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$

On pose  $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2°.  $f$  est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?
- 3°. Déterminer les variations de  $f$ .
- 4°. Déterminer un développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de  $x = 1$ .
- En déduire l'équation de la tangente à la courbe en  $x = 1$ . Préciser leur position relative.
- 5°. Déterminer le développement asymptotique de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ . En déduire les branches infinies de la courbe et leur position relative.
- 6°. La courbe admet-elle des points d'inflexion ? Est-elle convexe ? Concave ?
- 7°. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

**7.3**  $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de  $f$  et ses limites aux bornes du domaine.
- 2°. Déterminer un développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 3°. En déduire les asymptotes obliques et leur position par rapport à la courbe.
- 4°. Etudier les variations de  $f$  et la représenter.
- 5°. La courbe admet-elle un centre ou un axe de symétrie ?

**7.4**  $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$

Soit  $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$ .

- 1°. Démontrer que si  $x$  est racine de  $P$  alors  $\frac{1}{x}$  l'est aussi. En déduire les racines de  $P$  en posant  $t = x + \frac{1}{x}$ .
- 2°. Effectuer l'étude complète de  $f$ .

## 8 Fonctions diverses

$$1^\circ. \sqrt[3]{\frac{x^2(x-5)}{x+3}} \quad 2^\circ. \sqrt{\frac{x^3+2x^2+3x}{x-4}} \quad 3^\circ. \frac{3x-2}{3(x-1)} \sqrt{|x|} \quad 4^\circ. \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}} \quad 5^\circ. x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

## 9 Concours 2002

Soient  $a, b, c > 0$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$