MATHEMATIQUES TD N°2 : DIAGONALISATION - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2009/2010

I

Nous noterons $< u_1, ..., u_n >$ l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(u_1, ..., u_n)$. Lorsque cet espace sera de dimension 1, on notera parfois $\mathbb{R}u$ la droite vectorielle engendrée par u

1°. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $P(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
Si $u(2,1)$ et $v(1,2)$, $E_2 = \mathbb{R}u$ et $E_{-1} = \mathbb{R}v$

2°. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $P(x) = x^2 - 2x + 2$ n'a pas de racines réelles ; il n'y a donc pas de valeurs propres.

3°. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $P(x) = (x-2)^2$ et si $u(1,-1)$, $E_2 = \mathbb{R}u$

4°. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $P(x) = x^2 - 1$ et $Sp(A) = \{\pm 1\}$

5°. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $P(x) = (2-x)^2(4-x)$
Notons $u(1,0,-1)$, $v(0,1,1)$ et $w(1,0,1)$; alors $E_2 =< u, v >$ et $E_4 = \mathbb{R}w$

6°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $P(x) = (2-x)(x^2+1)$ et si $u(5,-13,6)$ alors $E_2 = \mathbb{R}u$

7°. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $P(x) = (6-x)(1-x)(3-x)$ et si $u(0,1,-1)$, $v(1,1,1)$ et $w(-2,1,1)$ alors $E_1 = \mathbb{R}u$, $E_6 = \mathbb{R}v$ et $E_3 = \mathbb{R}w$

8°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P(x) = (2-x)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ et si $u(1,3,12)$, $v(0,\sqrt{3}-1,1)$ et $w(0,-\sqrt{3}-1,-1)$ alors $E_2 = \mathbb{R}u$, $E_{\sqrt{3}} = \mathbb{R}v$ et $E_{-\sqrt{3}} = \mathbb{R}w$

II

Considérons la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = 1 \ \forall i, j = 1, .., n$

1°. $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n / \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$
C'est un hyperplan de dimension $n-1$ dont une base est donnée par $\{e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, ..., e_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$
0 est donc valeur propre de multiplicité $n-1$

2°. $Ae = ne \Rightarrow n$ est valeur propre associée au vecteur propre e et comme A possède au plus n valeurs propres $Sp(A) = \{0, n\}$. Donc $P(x) = x^{n-1}(x-n)$

3°. $Tr(A) = n$ et $\det A = 0$

4°. A est diagonalisable car elle est symétrique !

III

1°. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ $P(x) = -x(x-1)(x-2)$

$E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$
$\sum \dim E_i = 3$ donc A est diagonalisable et
$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base ci-dessus.

2°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P(x) = (1-x)^3$

$E_1 =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$
$\dim E_1 = 2 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

3°. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $P(x) = (1-x)^2(2-x)$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$
$\sum \dim E_i = 2 < 3$ donc A est n'est pas diagonalisable

4°. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P(x) = -(x-1)^2(x+2)$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $E_{-2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\sum \dim E_i = 2 < 3$ donc A est n'est pas diagonalisable

5°. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $P(x) = x(x-3)(x-1)$

$E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
On a trois espaces de dimension 1 donc A est diagonalisable et dans la base donnée par les trois vecteurs ci-dessus, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6°. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $P(x) = (x+2)(x-2)^2$
E_2 est formé des vecteurs dont les coordonnées vérifient $x - y + z = 0$, autrement dit :
$E_2 =< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ $E_{-2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\sum \dim E_i = 3$ donc A est est diagonalisable et
$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base ci-dessus

IV

1°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{N0N}}$ sinon 1 serait seule valeur propre et l'on aurait $A = I$

2°. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{NON}}$ car A est nilpotente, donc 0 est vp donc A non diagonalisable.

3°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{NON}}$ pour la même raison.

4°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ car elle est déjà sous forme diagonale !

5°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ car elle est symétrique.

6°. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ car elle a 3 valeurs propres simples en dimension 3.

7°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ car elle est symétrique.

8°. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ pour la même raison.

9°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{NON}}$ car $P(x) = -x(x-1)^2$ et $\dim\ker(A - I) = 1$
$X \in E_1 \iff x = y; z = 0$

10°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{OUI}}$ car $P(x) = (2-x)^2(3-x)$ et $\dim\ker(A - 2I) = 2$

V

1°. $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$
$\Rightarrow X_n = A^n X_0$ et le problème est donc le calcul de A^n

2°. $P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$ dont les racines sont $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
On a $\lambda + \lambda' = 1$ et $\lambda\lambda' = -1$; par ailleurs, puisque A a deux valeurs propres simples, A est diagonalisable et les sous espaces propres sont donnés par $E_\lambda = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{\lambda'} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda' \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $P = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage vers une base de vecteurs propres. On a également $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda' \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ et l'on en déduit que $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \lambda'^{n+1} & \lambda^n - \lambda'^n \\ \lambda^n - \lambda'^n & \lambda^{n-1} - \lambda'^{n-1} \end{pmatrix}$
Si l'on veut maintenant exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1, il suffit de remarquer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3°.
$u_n = \dfrac{1}{5}\left(\lambda^n - \lambda'^n + \lambda^{n-1} - \lambda'^{n-1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda+1)(\lambda^{n-1} - \lambda'^{n-1})$

VI

1°. $P(x) = (2-x)(1-x)^2 \Rightarrow E_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

et $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $D = P^{-1}AP$

On pose maintenant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = A_n$ et si

$Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ alors $Y_{n+1} = P^{-1}APY_n = DY_n$

de sorte que $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ 2\gamma_n \end{pmatrix}$ ie $\alpha_n = \alpha_0$, $\beta_n = \beta_0$ et $\gamma_n = 2^n\gamma_0$. Enfin, puisque $X_n = PY_n$, il vient

$$\begin{cases} x_n = \alpha_0 + 2^n\gamma_0 \\ y_n = \alpha_0 + \beta_0 + 2^n\gamma_0 \\ z_n = \beta_0 + 2^n\gamma_0 \end{cases}$$

Les suites convergent ssi $\gamma_0 = 0$, ie $-x_0 + y_0 - z_0 = 0$

2°. $P(x) = (x-1)(x+1)(2-x)$
De la même façon que ci-dessus, en notant

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

alors : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ d'où $A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2(-1)^{n+1} & 3 + 3(-1)^{n+1} & -3 + 2^{n+2} + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & 3 + 3(-1)^n & -3 + 2^{n+1} + (-1)^n \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & -3 + 3(-1)^n & 3 + 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix},$$

$X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{6}\left[2^{n+3} - 4(-1)^{n+1} + 3 + 3(-1)^{n+1} - 3 + 2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right] \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}\left[2^{n+2} - 4(-1)^{n} + 3 + 3(-1)^{n} - 3 + 2^{n+1} + (-1)^{n}\right] \\ w_{n+1} = \frac{1}{6}\left[2^{n+2} - 4(-1)^{n} - 3 + 3(-1)^{n} + 3 + 2^{n+1} + (-1)^{n}\right] \end{cases}$$

On constate que les lignes 2 et 3 donnent la même expression lorsque l'on change n en $n+1$; en simplifiant, on obtient : $u_n = v_n = 2^n$

VII

1°. $\begin{cases} x' = 2x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y + 2z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

$P(x) = -(x-1)^2(x+3)$

$E_{-3} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_1 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Notons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de sorte que $X = PY$

Résoudre le système différentiel revient à déterminer X tel que $X' = AX$, ce qui est équivalent à déterminer $Y = P^{-1}X$ tel que $Y' = DY$; en effet, comme indiqué dans le cours,
$X' = AX \iff PX' = PAX \iff Y' = PAP^{-1}(PY)$
$\iff Y' = DY$
Mais puisque D est diagonale, le système $Y' = DY$ est équivalent à la donnée de 3 équations différentielles simples (on a en fait "désimbriquées" les équations).

$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = -3y_3 \end{cases}$ dont les solutions se calculent facilement : $y_1 = k_1e^t$, $y_2 = k_2e^t$, $y_3 = k_3e^{-3t}$

$\Rightarrow X = PY = \begin{cases} k_1e^t + k_2e^t + k_3e^{-3t} \\ k_2e^t + 2k_3e^{-3t} \\ -k_1e^t + k_2e^t - k_3e^{-3t} \end{cases}$

La condition $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + 2k_3 = 1 \\ k_2 - k_1 - k_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = e^t$

2°. $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$

En utilisant la même technique que ci-dessus, on obtient les résultats suivants :
$P(x) = (1-x)(2+x)^2$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-2} = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -2y_2 \\ y_3' = -2y_3 \end{cases}$ dont les solutions se calculent facilement : $y_1 = k_1e^t$, $y_2 = k_2e^{-2t}$, $y_3 = k_3e^{-2t}$

$\Rightarrow X = PY \iff \begin{cases} x = k_1e^t - k_2e^{-2t} - k_3e^{-2t} \\ y = k_1e^t + k_2e^{-2t} \\ z = k_1e^t + k_3e^{-2t} \end{cases}$

3°. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ z' = 3z \end{cases}$

La dernière équation $z' = 3$ s'intègre immédiatement en $z = ke^{3t}$, les deux autres donnent alors un système différentiel de taille 2×2 :
$P(x) = (1-x)(3-x)$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases}$ dont les solutions se calculent facilement : $y_1 = k_1e^t$, $y_2 = k_2e^{3t}$,

$\Rightarrow X = PY \iff \begin{cases} x = -k_1e^t + k_2e^{3t} \\ y = k_1e^t + k_2e^{3t} \\ z = k_3e^{3t} \end{cases}$

VIII

1°. λ valeur propre de $A \iff$ il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$

2°. $AB = BA$ et ces matrices sont symétriques donc diagonalisables.

3°. $P_A(x) = x^2(3-x)$ $Sp(A) = \{0, 3\}$

$E_0^A = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > E_3^A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_B(x) = (x+2)^2(x-1)$ $Sp(B) = \{-2, 1\}$

$E_{-2}^B = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > E_1^B = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En fait, on a $P_B(x) = P_A(x+2)$, cqfd.

4°. Dans la base donnée par les colonnes de P, les matrices associées à A et B sont $D_u = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$D_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5°. $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6°. $X' = BX \iff Y = P^{-1}X$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$Y' = DY \iff \begin{cases} u' = u \\ v' = -2v \\ w' = -2w \end{cases}$ dont les solutions sont :
$u = k_1e^t$, $v = k_2e^{-2t}$,$w = k_3e^{-2t}$,

$$\Rightarrow X = PY \iff \begin{cases} x = k_1e^t - k_2e^{-2t} - k_3e^{-2t} \\ y = k_1e^t + k_2e^{-2t} \\ z = k_1e^t + k_3e^{-2t} \end{cases}$$

7°. De $X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^nX_0$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n & 1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_n = s + (-2)^n(-2u_0 - v_0 - w_0) \\ v_n = s + (-2)^n(2u_0 + v_0 + w_0) \\ w_n = s + (-2)^n(u_0 + v_0) \end{cases} \quad \text{avec}$$

$s = u_0 + v_0 + w_0$.

Ces trois suites convergent si et seulement si

$$\begin{cases} 2u_0 + v_0 + w_0 = 0 \\ 2u_0 + v_0 + w_0 = 0 \\ u_0 + v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_0 = -v_0 = -w_0$$

IX

$\mathcal{E}$ ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme
$M = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$

1°. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow M = aJ + bK$
$J^2 = 2J$, $K^2 = 2K$, $KJ = JK = 0$
$\Rightarrow M + M' = (a + a')J + (b + b')K \in \mathcal{E}$ et
$MM' = (aJ + bK)(a'J + b'K) = (2aa')J + (2bb')K \in \mathcal{E}$

2°. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices 2×2 et l'écriture $aJ + bK$ est unique et J et K sont linéairement indépendantes (leurs coefficients ne sont pas proportionnels). $\Rightarrow \mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et de base $\{J, K\}$

3°. Posons $a = b = 1/2 \Rightarrow I \in \mathcal{E}$; on cherche alors $M'(a', b')/\ MM' = I$; or, $MM' = (2aa')J + (2bb')K$ donc on doit avoir $2aa' = 1/2$ et $2bb' = 1/2$, ie $a' = \frac{1}{4a}$ et $b' = \frac{1}{4b} \Rightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{4a}J + \dfrac{1}{4b}K$
M est inversible ssi a et b sont non nuls.

4°. Par récurrence, $M^n = 2^{n-1}a^nJ + 2^{n-1}b^nK$

5°. M est symétrique donc diagonalisable.

6°. $P(x) = \begin{vmatrix} a+b-x & a-b \\ a-b & a+b-x \end{vmatrix}$
$= (a + b - x)^2 - (a - b)^2 = (2b - x)(2a - x)$
$\Rightarrow Sp(M) = \{2a, 2b\}$
$E_{2a} = \ker(A - 2aI) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_{2b} = \ker(A - 2bI) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Les deux espaces sont de dimension 1

7°. $D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,
$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

X

1°. $P(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -(1 - x)^2(x + 1)$

$Sp(A) = \{\pm 1\}$
E_1 est formé des vecteurs dont les coordonnées vérifient $x = -z$ et $y = z$. Autrement dit :

$E_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ et $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°. $D^2 = I$ et
$D = P^{-1}AP \Rightarrow P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = I \Rightarrow A^2$
$\Rightarrow A = A^{-1}$

3°. Par suite, $A^n = I$ si n pair et $A^n = A$ si n impair

4°. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et

$Y = P^{-1} \Rightarrow X = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$X' = AX \iff Y' = DY \iff \begin{cases} u = k_1e^t \\ v = k_2e^t \\ w = k_3e^t \end{cases}$

5°. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ et

$X_{n+1} = AX_n \iff X_n = A^nX_0$; on trouve alors, après calculs, $\begin{cases} u_n = u_0 \\ v_n = v_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}$ si n pair

et $\begin{cases} u_n = u_0 \\ v_n = u_0 + v_0 + w_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}$ si n impair

6°. Soit $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]/$
$P = ax^2 + bx + x \to \phi(P) = cx^2 + (c + b - a)x + a$
$\phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q)$ et $\phi(\lambda P) = \lambda\phi(P)$
$\Rightarrow \phi$ linéaire et $M_\phi = A = A^{-1} = M_{\phi^{-1}}$
Donc si $\phi(P) = x^2 + x + 1$ alors $P = x^2 + x + 1$ et l'on a
$F = E_1 = \{P(x) = ax^2 + bx + a; a, b \in \mathbb{R}\}$

7°. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \left(I + A + ... + \frac{A^n}{n!}\right)$

$\displaystyle\Rightarrow e^A = I\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k)!} + A\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)!}$

$\Rightarrow e^A = ch\ 1 \times I + sh\ 1 \times A$ $e^A = \begin{pmatrix} ch\ 1 & 0 & sh\ 1 \\ sh\ 1 & e & -sh\ 1 \\ sh\ 1 & 0 & ch\ 1 \end{pmatrix}$

XI

1°. A est symétrique donc diagonalisable.

2°. $P(x) = -(x + 1)^2(x - 5) \Rightarrow Sp(A) = \{-1; 5\}$

$E_{-1} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$ et $E_5 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \{(x, y, z)/\ x + y + z = 0\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3°. $\det P = 3$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4°. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et

$Y = P^{-1} \Rightarrow X = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$X' = AX \iff Y' = DY$

$\iff \begin{cases} x = k_1e^{5t} + k_2e^{-t} \\ y = k_1e^{5t} + k_3e^{-t} \\ z = k_1e^{5t} - k_2e^{-t} - k_3e^{-t} \end{cases}$

5°. $\phi(1) = 2x^2 + 2x + 1$, $\phi(x) = 2x^2 + x + 2$,

$\phi(x^2) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow A = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Par ailleurs, on vérifie que $\phi(P - Q) = \phi(P) - \phi(Q)$ donc ϕ linéaire.

6°. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & a' \end{pmatrix}$

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et de même, $A + A' \in \mathcal{E}$, $I \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R}$

$A = aI + bJ + cK$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et cette écriture est unique. Donc $\mathcal{E}$ est de dimension 3 ; une base est $\{I, J, K\}$

Là encore, $\Lambda(A + A') = \Lambda(A) + \Lambda(A')$ et $\Lambda(\lambda A) = \lambda\Lambda(A)$ et donc Λ est linéaire et sa matrice dans la base $\{I, J, K\}$ est A

XII

1°. $P(x) = \begin{vmatrix} 3 - x & -2 \\ 2 & 2 - x \end{vmatrix} = (x - 2)(x + 1)$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres simples. On a par ailleurs $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - (-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & -2^n + 4(-1)^n \end{pmatrix}$

2°. $X_n = AX_{n-1} = A^nX_0$

$\Rightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{3}\left((2^{n+2} - (-1)^n)\alpha + (-2^{n+1} + 2(-1)^n)\beta\right) \\ v_n = \frac{1}{3}\left((2^{n+1} - 2(-1)^n)\alpha + (-2^n + 4(-1)^n)\beta\right) \end{cases}$

3°. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et

$Y = P^{-1} \Rightarrow X = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$X' = AX \iff Y' = DY$

$\iff \begin{cases} x = 2k_1e^{2t} + k_2e^{-t} \\ y = k_1e^{2t} + 2k_2e^{-t} \end{cases}$ Si $x(0) = y(0) = 1$ alors $2k_1 + k_2 = 1$ et $k_1 + 2k_2 = 1$ d'où $k_1 = k_2 = 1/3$ et la solution (unique) est en ce cas $\begin{cases} x = 2/3e^{2t} + 1/3e^{-t} \\ y = 1/3e^{2t} + 2/3e^{-t} \end{cases}$

XIII

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$, $Sp(A) = \{1; 3\}$,

$E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \ker(A - I)$ ie

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff x = 0$ et $\alpha x = \alpha z$.

Si $\alpha = 0$, l'équation est toujours vérifiée et $\dim E_1 = 2$ et E_1 est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par j et k.
Si $\alpha \neq 0$, $x = z = 0 \Rightarrow \dim E_1 = 1$ et alors E_1 est un espace de dimension 1 engendré par j

2°. $\alpha = 0 \Rightarrow A$ est diagonalisable. $\alpha \neq 0 \Rightarrow A$ non diagonalisable.

3°. 4°. $\beta \in E_3$ et $j \in E_1$ dans tous les cas, on a $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a une matrice de passage vers cette base.

5°. $\det P \neq 0$ donc P inversible et

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut alors calculer $T = P^{-1}AP$ et constater à nouveau le résultat.

6°. $T^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^n = PT^nP^{-1}$ donne

$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ -n\alpha & 1 & n\alpha \\ 3^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = 0$, T est diagonale et le calcul est plus facile.

7°. v a pour matrice

$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker v \iff x = 0$ $F_1 =< j, k >$ et $\dim F_1 = 2$

Si $\alpha = 1$, $\dim E_1 = 1$ et E_1 engendré par j dont on voit clairement qu'il est inclus dans F_1 . Comme il s'agit d'espaces vectoriels (ce sont des noyaux d'applications linéaires), alors E_1 est un sev de F_1.
$v(\gamma) = 0$ et $u(\gamma) = \gamma + j \neq 0 \Rightarrow \gamma \in F_1$ et $\gamma \notin E_1$. Ceci explique que γ n'est pas un vecteur propre et que T n'est pas diagonalisable.

XIV

$B = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$

1°. $P(x) = x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$

2°. $E_2 = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = < \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

3°. $\sum \dim E_\lambda = 3$ donc B est diagonalisable.

4°. $P = \begin{pmatrix} a^2 & -a & -a^2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$P^{-1} = \dfrac{1}{3a^2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ -a & 2a^2 & -a \\ -1 & -1 & 2a^2 \end{pmatrix}$

XV

1°. $P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)^3$ $Sp(A) = \{1\}$

$E_1 = \ker(A - I) = \ker B = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}\}$

$\ker B$ a pour dimension 2 alors que l'on est en dimension 3, donc A n'est pas diagonalisable.

2°. v^2 a pour matrice $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\ker v^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}\}$

$B^3 = 0$

$\Rightarrow A = (B - I) \Rightarrow A^n = (B-I)^n = I + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

d'après la formule du binôme (car B et I commutent) et d'après ce qui précède.

3°. $A^{10} = I + 10B + 45B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -160 & -200 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

XVI

1°. $P_A(x) = -(x+1/2)(x-1/2)^2$ et
$P_B(x) = -(2-x)^2(2+x)$

2°. $A^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

donc $A^2 = I/4$ et $B^2 = 4I$ donc $B^{-1} = B/4$

3°. $u \circ v$ a pour matrice $AB = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $v \circ u$ a pour matrice $BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

A et B ne commutent donc pas. Par contre, $(BA)^{-1} = AB$

XVII

1°. Non car 0 est vp donc $\det M = 0$

2°. $Sp(M) = \{3, -4, -3, 0\}$; on a 4 valeurs propres simples donc M est diagonalisable.

3°. $u(P) = x^2P'' - (x+1)P' - 3P$ dans $E = \mathbb{R}_3[X]$
$u(1) = -3$, $u(x) = -4x + 1$, $u(x^2) = -3x^2 - 2x$ et $u(x^3) = -3x^2$

donc $M_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$

$X \in \ker u \iff y = -3x, z = 6x, t = -6x$ ie $\ker u$ est de dimension 1 et engendré par le vecteur $(1, -3, 6, -6)$.
$Im(u)$ a pour dimension 3 et est l'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 2.

XVIII

XIX

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ \alpha - 1 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. $P_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha - x & 0 & 1-\alpha \\ \alpha - 1 & 1-x & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(\alpha - x)$

$E_\alpha = \ker(A - \alpha I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\alpha \\ \alpha - 1 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$

- si $\alpha = 1$, $E_\alpha = \mathbb{R}^3$ et α est la seule valeur propre de A
- si $\alpha \neq 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\alpha \iff z = 0, x \neq y$ et

$E_\alpha = \{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}\}$ de dimension 1 et de base $(1, 1, 0)$

Par ailleurs, $E_1 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

2°. $\alpha = 0 \iff \alpha$ valeur propre $\iff \det A = 0 \iff A$ non inversible.

3°. Pour toute valeur de α, A est diagonalisable car la somme des dimensions des sep vaut 3 dans tous les cas.

4°. $\det P = 1 \neq 0$ donc P est inversible et

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ après calculs.

5°. Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A respectivement associés à $1, 1, \alpha$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

6°. $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ et $A^n = PD^nP^{-1} \Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 1+\alpha^n \\ \alpha^n - 1 & 1 & 1+\alpha^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7°. On constate après calculs que

$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et que le calcul de $P_B(x)$ donne $(1-x)^2(\alpha - x)$ de sorte que les valeurs propres de B sont les mêmes que celles de A et B diagonalisable $\iff \dim E_1 = 2 \iff \beta = 0$

XX Mécanique quantique.

A. Première partie.

Considérons un système physique dont l'espace des états est $\mathbb{R}^2$, de dimension 2. On considère trois observables dont les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, sont $H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où ω_0, a et b sont des constantes réelles.
Au temps $t = 0$, le système physique est dans l'état $\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1°. On mesure, à $t = 0$, l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Calculer, pour le système dans l'état $\psi(0)$, la valeur moyenne $< H >$ de l'Hamiltonien et l'écart quadratique ΔH.

On constate que H est diagonale. La base canonique choisie pour l'espace des états est donc une base de vecteurs propres de l'opérateur. D'après les postulats, les valeurs possibles pour l'Hamiltonien sont les valeurs propres, soit $\hbar\omega_0$ ou $2\hbar\omega_0$. La probabilité de mesurer $\hbar\omega_0$ est

$$< e_1|\psi >^2 = ({}^t e_1 \times \psi)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)^2 = 3/4$$

et la proba de trouver $2\hbar\omega_0$ est donc $1/4$. Si l'on mesure $\hbar\omega_0$, alors le système se retrouve immédiatement après dans l'état $(1, 0)$ qui correspond au vecteur propre associé à cette valeur propre.

2°. Au lieu de mesurer H en $t = 0$, on mesure A. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

A est également diagonale dans la même base que H. On peut donc trouver comme valeur a avec probabilité $3/4$ et $-a$ avec probabilité $1/4$. Si l'on mesure a, alors le système se place dans l'état $(1, 0)$; si l'on mesure $-a$, il se place dans l'état $(0, 1)$.

3°. Calculer $< H >$ et ΔH à $t = 0$. Calculer les valeurs moyennes $< A >_0$ et $< B >_0$ de A et B à l'instant $t = 0$. Quelles remarques peut-on faire ?

$< H >={}^t \psi H \psi$
$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\hbar\omega_0$
$\Delta H^2 =< H^2 > - < H >^2$
$= \frac{3}{4}(\hbar\omega_0)^2 + \frac{1}{4}(2\hbar\omega_0)^2 - \frac{5}{4}(\hbar\omega_0)^2$ ie $\Delta H = \frac{\sqrt{3}}{4}\hbar\omega_0$
Cette valeur mesure la dispersion des mesures de l'Hamiltonien.

4°. Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? et B ? Interprétation ?

Partie B.

On considère un système dont l'espace des états est $\mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Dans cette base, on considère trois opérateurs dont les matrices dans la base canonique sont :

$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
avec ω_0, a et b constantes positives.

5°. H, A et B sont-ils hermitiques ? Montrer que H et A commutent. Qu'en est-il de H et B ? Trouver une base de vecteurs propres commune à H et A.

${}^t\bar{H} = H$ donc H est hermitique. Idem pour A et B.
$[H, A] = 0$ donc H et A commutent et
$[H, B] = \hbar\omega_0 b \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ donc H et B sont incompatibles.

H est déjà diagonale : (e_1, e_2, e_3) est donc base de vecteurs propres. Le calcul des sous espaces propres montre que l'espace propre associé à $\hbar\omega_0$ est de dimension 1 engendré par $(1, 0, 0)$. Le sous espace propre associé à $-\hbar\omega_0$ est de dimension 2 engendré par $e_2(0, 1, 0)$ et $e_3(0, 0, 1)$ donc aussi par $v(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $w(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. De la même façon, les valeurs propres de A sont $\pm a$ avec comme sous espace propre associé à a l'espace de dimension 2 engendré par $e_1(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ et comme sous espace associé à $-a$ l'espace de dimension 1 engendré par $(0, 1, -1)$. Ainsi, (e_1, v, w) est une base de vecteurs propres commune aux deux opérateurs.

6°. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
On mesure, toujours à $t = 0$, l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver ? Avec quelles probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

Les coordonnées du vecteur $\psi(0)$ dans la nouvelle base sont $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, soit, après l'avoir normé, $(1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2)$. La proba de mesurer $\hbar\omega_0$ est donc $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ et celle de mesurer $-\hbar\omega_0$ est $1/4 + 1/4 = 1/2$. On pouvait aussi calculer ${}^t\psi(0)e_1 = 1/2$. Le vecteur d'état immédiatement après la mesure est le vecteur propre normé correspondant à la mesure.

7°. A $t = 0$, le système est dans l'état $\psi(0)$. On le laisse évoluer librement. Calculer le vecteur d'état $\psi(t)$.
A t, on mesure A. Quels résultats obtient-on et avec quelles probabilités ? Calculer $< A >_t$.
A t, au lieu de mesurer A on mesure B. Mêmes questions.

Partie C.

On considère une particule de spin 1/2 et de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{s}$. Le spin peut se voir comme la rotation de la particule sur elle même. L'espace des états du spin est $\mathbb{R}^2$ et ses valeurs possibles sont les valeurs propres de S_z. Dans la base canonique (e_1, e_2), on considère donc les trois opérateurs

$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

8°. S_x, S_y et S_z sont-ils des observables ? Ces opérateurs commutent-ils ?

9°. Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de S_z ?

10°. Existe-t-il une base de vecteurs propres commune de S_x et S_y ?

11°. A $t = 0$, l'état du système est $\psi(0) = e_1$. Si l'on mesure à l'instant $t = 0$ l'observable S_x, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

12°. Au lieu d'effectuer cette mesure, on laisse évoluer le système librement sous l'influence d'un champ magnétique parallèle à (Oy) de module B_0. Ecrire la matrice de l'Hamiltonien du système dans la base (e_1, e_2), sachant que l'on peut montrer que H peut se mettre sous la forme $H = -\gamma B_0 S_y$ (γ constante négative). On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$

13°. Le système étant toujours dans l'état initial $\psi(0) = e_1$, déterminer dans la base (e_1, e_2) l'état du système à l'instant t.

14°. On mesure à l'instant t l'observable S_x. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quelle relation doit-il avoir entre B_0 et t pour que l'une des mesures soit certaine ? Même question pour S_y et S_z. Peut-on mesurer simultanément S_x, S_y et S_z ? Pourquoi ? Calculer leur valeur moyenne au cours du temps.