MATHEMATIQUES TD N°2 : DIAGONALISATION.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2009/2010

I

Déterminer les valeurs et sous espaces propres des matrices ci dessous en précisant base et dimension.

1°. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2°. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3°. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4°. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5°. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 6°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 7°. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 8°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

II

Considérons la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = 1 \ \forall i, j = 1, .., n$

1°. Déterminer $\ker A$ et en déduire une valeur propre de A. Quelle est sa multiplicité ?

2°. Démontrer que n est valeur propre de A et déterminer son polynôme caractéristique.

3°. Calculer la trace et le déterminant de cette matrice. Montrer que A est diagonalisable.

III

Pour chacune des matrices ci dessous, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres réelles et dire si la matrice est diagonalisable.Lorsque tel est le cas, donner une base de vecteurs propres et la forme diagonale de la matrice dans la base de vecteurs propres :

1°. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ 2°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3°. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

4°. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5°. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 6°. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

IV

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2°. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4°. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 5°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

6°. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 7°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8°. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 9°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10°. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

V Des lapins.

Considérons la suite de Fibonacci : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, n \geq 0$

1°. Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $X_{n+1} = AX_n$ et exprimer X_n en fonction de X_0

2°. Diagonaliser A et en déduire l'expression de A^n

3°. Calculer u_n en fonction de n.

VI

1°. On considère trois suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définies par récurrence par $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$

Soit A la matrice du système précédent.
Démontrer que A est diagonalisable et déterminer $P/\ D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
Exprimer chacune des 3 suites en fonction de n et de leur 1er terme et donner la condition de leur convergence.

2°. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites définies par $\left\{\begin{array}{l} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_{n+1} - u_n + v_n \end{array}\right.$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n lorsque $u_0 = 1, u_1 = 2, v_0 = 1$ puis lorsque $u_0 = 1, u_1 = -1, v_0 = 1$

VII Systèmes différentiels.

1°. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y + 2z \\ z' = -x + 2y \end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{array}\right.$ 2°. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{array}\right.$ 3°. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ z' = 3z \end{array}\right.$

VIII Famille diagonalisable.

Soient u et v 2 applications linéaires de matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$

1°. Rappeler la définition précise d'une valeur et d'un vecteur propre d'une matrice.
2°. Montrer que A et B commutent et expliquer pourquoi ces matrices sont diagonalisables.
3°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de u et v (on notera ces espaces E_λ^A et E_λ^B).
4°. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u et v sont simultanément diagonales.
Expliciter cette base ainsi que les matrices diagonales D_u et D_v correspondantes.

5°. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer P^{-1}

6°. Résoudre le système différentiel $S \left\{\begin{array}{l} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{array}\right.$ avec $x(t), y(t), z(t)$ fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

7°. Déterminer en fonction de n l'expression des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ données par :

$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{array}\right.$ $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ fixés.

Pour quelles valeurs de ces trois nombres les suites convergent-elles ?

IX

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$

1°. Déterminer deux matrices J et K telles que $M = aJ + bK$, $\forall M \in \mathcal{E}$
Calculer J^2, K^2, JK, KJ et en déduire l'expression de $M + M'$ et MM' $\forall M, M' \in \mathcal{E}$
2°. Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ dont vous donnerez une base et la dimension.
3°. Démontrer que $I \in \mathcal{E}$. Déterminer à quelle condition une matrice M est inversible et donner l'expression de M^{-1}
4°. Calculer $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$
5°. Démontrer sans calcul que M est diagonalisable.
6°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de M.
7°. Déterminer deux matrices D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}MP$

X

On considère l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°. Diagonaliser A en explicitant la forme diagonale D et la matrice de passage P. Calculer P^{-1}
2°. Démontrer que $D^2 = I$ et en déduire A^{-1}. Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$
3°. Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \quad \text{où } x, y, z \text{ sont des fonctions de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ z'(t) = x(t) \end{array} \right.$$

4°. Déterminer en fonction de u_0, v_0, w_0 et n les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{array} \right.$$

5°. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels.
Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application qui à un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ associe le polynôme $\Phi(P)(X) = cX^2 + (c + b - a)X + a$

Montrer que Φ est linéaire et calculer sa matrice M_Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
Déterminer Φ^{-1} et en déduire les éléments du sous espace vectoriel $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] /\ \Phi(P) = P\}$

6°. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n
Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite de matrices dont nous noterons $a^k_{i,j}$ les termes.
On dit que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} a^k_{i,j} = a_{i,j}\ \forall i, j = 1..n$
On admet que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge. Sa somme est l'exponentielle e^A de A. La calculer.

XI

On considère l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1°. A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A (en précisant base et dimension).
2°. Diagonaliser A en explicitant la forme diagonale D et la matrice de passage P

3°. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
4°. Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \quad \text{où } x, y, z \text{ sont des fonctions de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

5°. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels.
Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application qui à un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ associe le polynôme $\Phi(P)(X) = (a + 2b + 2c)X^2 + (2a + b + 2c)X + (2a + 2b + c)$
Montrer que Φ est linéaire et calculer sa matrice M_Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

6°. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $a, b \in \mathbb{R}$
Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

Soi $\Lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application qui à une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$ associe la matrice

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} a + 2b + 2c & 2a + 2b + c \\ 2a + b + 2c & a + 2b + 2c \end{pmatrix}$$

Démontrer que Λ est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

XII

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in\ M_2(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in\ M_2(\mathbb{R})$

1°. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n, puis A^n pour $n \geq 1$
2°. Considérons deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2v_n \end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \alpha \\ v_0 = \beta \end{array}\right.$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixés. On pose enfin $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

A l'aide de la question précédente, exprimer u_n et v_n en fonction de α, β et n.
3°. Considérons le système différentiel suivant :

$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{array}\right.$, $x(t), y(t)$ fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Résoudre ce système et déterminer la solution vérifiant $x(0) = y(0) = 1$

XIII

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer ses valeurs, vecteurs et sous espaces propres (dont on donnera base et dimension).
2°. Pour quelle valeur de α la matrice est-elle diagonalisable ?
3°. On considère les vecteurs $\beta(1, 0, 1)$ et $\gamma(0, 1, 1)$ dont les coordonnées sont données dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice T de u dans la base (β, j, γ). Quelle est la matrice de passage P vers cette base ?
4°. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
5°. On suppose que $\alpha = 0$. Déterminer T^n et en déduire A^n
6°. On suppose que $\alpha = 1$ et on note v l'application $(u - Id)^2$ (composée de $u - Id$ avec elle même)
On note également $E_1 = \ker(u - Id)$
Déterminer $F_1 = \ker v$ ainsi que sa dimension et une base.
Démontrer que E_1 est un sous espace vectoriel de F_1
Démontrer que $\gamma \in F_1$ mais que $\gamma \notin E_1$. Expliquer alors la forme de T

XIV

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer les valeurs propres de B
2°. Déterminer les sous espaces propres de B en précisant une base et la dimension
3°. Démontrer que B est diagonalisable. Expliciter une matrice de passage P vers une base de vecteurs propres et la matrice diagonale D correspondante.

XV

Soit u une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Posons $v = u - Id$ ou Id représente l'identité dans $\mathbb{R}^3$ et appelons B la matrice associée à v dans la même base que ci dessus.

1°. Déterminer le polynôme caractéristique de A, ses valeurs et sous espaces propres.

2°. Déterminer $\ker v^2$, démontrer que $A^n = I + nB + \dfrac{n(n-1)}{2}B^2$

3°. Calculer A^{10}.

XVI

Soit u une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

et v l'application linéaire de matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1°. Déterminer les polynômes caractéristiques de u et v.
2°. Déterminer u^2, v^2 et l'inverse de v^2.
3°. Déterminer $u \circ v$, $v \circ u$ et $(v \circ u)^{-1}$.

XVII

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1°. La matrice M est-elle inversible ?
2°. Déterminer ses valeurs propres. Est-elle diagonalisable ?
3°. Soit u l'application linéaire de E dans E définie par $u(P) = x^2P'' - (x+1)P' - 3P$.
Déterminer la matrice de u dans la base canonique de E. Déterminer $\ker u$ et imu

XVIII

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de ces deux matrices.
2°. Déterminer A^n et B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

XIX

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha \\ \alpha - 1 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A en précisant pour chacun d'eux une base et la dimension.
2°. Pour quelles valeurs de α A est-elle inversible ?
3°. Pour quelles valeurs de α A est-elle diagonalisable ?
4°. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}
5°. Déterminer la matrice de u dans la base formée par les vecteurs colonnes de P
6°. Calculer A^n pour tout entier n.
7°. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 1-\alpha-\beta \\ \alpha - 1 & 1 & 1-\alpha \\ \beta & 0 & 1-\beta \end{pmatrix}$
Calculer PBP^{-1} et en déduire les valeurs de α et β pour lesquelles B est diagonalisable.

XX Mécanique quantique.

Postulats de la mécanique quantique :

• A tout instant t, l'état d'un système est représenté par un vecteur noté $\psi(t)$ ou $|\psi(t) >$ appelé vecteur ket et appartenant à l'espace des états $\mathcal{E}$.

• Toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$ est représentée par un opérateur hermitique A agissant sur les kets et appelée grandeur observable.

• La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un état ψ ne peut donner qu'une valeur propre de l'opérateur A.

• Lorsque l'on mesure une grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un état ψ normé, la probabilité $\mathbb{P}(\lambda_n)$ de trouver λ_n comme résultat de la mesure est $\mathbb{P}(\lambda_n) =^t \psi \times \Pi_n \times \psi$ où Π_n est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_n.
Si dans une base de vecteurs propres $(e_n)_n$ on a $\psi = \sum_n c_n e_n$ alors $\mathbb{P}(\lambda_n) = |c_n|^2$

• Si la mesure de $\mathcal{A}$ sur ψ donne λ_n, l'état du système immédiatement après la mesure est $\dfrac{\Pi_n \times \psi}{\sqrt{^t\psi \times \Pi_n \times \psi}}$

• L'évolution au cours du temps du système est donnée par l'équation de Shrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H \times \psi(t)$$

où H est l'hamiltonien du système (il représente l'énergie du système).

On rappelle que l'adjoint d'un opérateur A est l'opérateur de matrice $A^{\times} = {}^t\bar{A}$ et qu'un opérateur est hermitique ou hermitien ssi $AA^{\times} = I$. On est alors certain que cet opérateur sera diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Le fait qu'une grandeur physique soit représentée par une matrice a des conséquences importantes. Le produit matriciel n'étant pas commutatif, l'ordre suivant lequel on mesure des grandeurs différentes ne va pas donner le même résultat, sauf si ces deux matrices commutent. On définit alors le commutateur de deux matrices par $[A, B] = AB - BA$. Si ce commutateur est nul, alors les matrices commutent et l'on dit que les grandeurs correspondantes sont compatibles. On peut alors mesurer ces observables simultanément. Dans le cas contraire, on dit que les observables sont incompatibles.

A. Première partie.

Considérons un système physique dont l'espace des états est $\mathbb{R}^2$, de dimension 2. On considère trois observables dont les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, sont $H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où ω_0, a et b sont des constantes réelles.

Au temps $t = 0$, le système physique est dans l'état $\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1°. On mesure, à $t = 0$, l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Calculer, pour le système dans l'état $\psi(0)$, la valeur moyenne $< H >$ de l'Hamiltonien et l'écart quadratique ΔH.
2°. Au lieu de mesurer H en $t = 0$, on mesure A. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?
3°. Calculer $< H >$ et ΔH à $t = 0$. Calculer les valeurs moyennes $< A >_0$ et $< B >_0$ de A et B à l'instant $t = 0$. Quelles remarques peut-on faire ?
4°. Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? et B ? Interprétation ?

Partie B.

On considère un système dont l'espace des états est $\mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Dans cette base, on considère trois opérateurs dont les matrices dans la base canonique sont :

$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec ω_0, a et b constantes positives.

5°. H, A et B sont-ils hermitiques ? Montrer que H et A commutent. Qu'en est-il de H et B ? Trouver une base de vecteurs propres commune à H et A.

6°. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

On mesure, toujours à $t = 0$, l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver ? Avec quelles probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?
7°. A $t = 0$, le système est dans l'état $\psi(0)$. On le laisse évoluer librement. Calculer le vecteur d'état $\psi(t)$.
A t, on mesure A. Quels résultats obtient-on et avec quelles probabilités ? Calculer $< A >_t$.
A t, au lieu de mesurer A on mesure B. Mêmes questions.

Partie C.

On considère une particule de spin 1/2 et de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{s}$. Le spin peut se voir comme la rotation de la particule sur elle même. L'espace des états du spin est $\mathbb{R}^2$ et ses valeurs possibles sont les valeurs propres de S_z. Dans la base canonique (e_1, e_2), on considère donc les trois opérateurs

$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

8°. S_x, S_y et S_z sont-ils des observables ? Ces opérateurs commutent-ils ?
9°. Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de S_z ?
10°. Existe-t-il une base de vecteurs propres commune de S_x et S_y ?
11°. A $t = 0$, l'état du système est $\psi(0) = e_1$. Si l'on mesure à l'instant $t = 0$ l'observable S_x, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
12°. Au lieu d'effectuer cette mesure, on laisse évoluer le système librement sous l'influence d'un champ magnétique parallèle à (Oy) de module B_0. Ecrire la matrice de l'Hamiltonien du système dans la base (e_1, e_2), sachant que l'on peut montrer que H peut se mettre sous la forme $H = -\gamma B_0 S_y$ (γ constante négative). On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$
13°. Le système étant toujours dans l'état initial $\psi(0) = e_1$, déterminer dans la base (e_1, e_2) l'état du système à l'instant t.
14°. On mesure à l'instant t l'observable S_x. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quelle relation doit-il avoir entre B_0 et t pour que l'une des mesures soit certaine ? Même question pour S_y et S_z.
Peut-on mesurer simultanément S_x, S_y et S_z ? Pourquoi ? Calculer leur valeur moyenne au cours du temps.

XXI Axes principaux d'inertie d'un solide.

La matrice d'inertie par rapport à O d'un solide Σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $I_0(\Sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer ses axes principaux d'inertie.

XXII Le pendule de Foucault

L'expérience de Léon Foucault a été réalisée le 31 Mars 1851 au Panthéon. Le but était de démontrer la rotation de la terre autour de son axe de révolution, en observant que le plan dans lequel se balance le pendule est lui-même affecté d'un mouvement de rotation : Le plan d'oscillation du pendule tourne lentement dans le référentiel terrestre, dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque l'on se trouve dans l'hémisphère Nord. Il s'agit bien entendu du mouvement apparent : c'est la terre qui tourne et non le pendule. Celui-ci n'est pas lié au référentiel terrestre puisqu'il n'est attaché que par un seul point à ce référentiel.

Le pendule de Foucault est formé d'un fil métallique de 67 mètres de long au bout duquel est attaché une sphère de laiton, d'acier et de plomb de 28 kg. La rotation de la terre étant lente, le fil du pendule doit être très long afin que sa vitesse soit faible et que les frottements de l'air soient négligeables.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à la terre. O est le point d'attache du pendule, $\vec{i}$ pointe vers l'Est, $\vec{j}$ vers l'Ouest et $\vec{k}$ pointe vers le haut en donnant la verticale.

Soit M le centre de gravité du pendule. Notons $(x(t), y(t), z(t))$ ses coordonnées à l'instant t ; nous supposerons qu'il s'agit de fonctions de classe C^2 du temps. Le mouvement du pendule est donc piloté par ces trois valeurs que nous allons déterminer.

Soient $\omega = \dfrac{2\pi}{24}$ la vitesse de rotation de la terre, θ la latitude de Paris et L la longueur du fil.

1°. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur le pendule. On négligera les frottements, mais pas la force de Coriolis : cette force $\vec{\gamma}$ existe à cause de la rotation de la terre et est perpendiculaire au vecteur vitesse.
On donne $\vec{\gamma} = 2\omega\vec{v} \wedge \vec{k}$

2°. Montrer que $\vec{\gamma} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. La calculer.

3°. En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, démontrer que les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} x'' = -2\omega\cos\theta \times z' + 2\omega\sin\theta \times y' + \lambda x \\ y'' = -2\omega\sin\theta \times x' + \lambda y \\ z'' = 2\omega\cos\theta \times x' + \lambda z - g \\ x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \end{cases}$$

4°. Nous supposerons que les oscillations sont faibles, de telle sorte que l'on peut négliger les termes verticaux en z et les termes du second ordre. Pour cette raison, dans la troisième équation, le terme en x' va être omis. Finalement, démontrer que les équations deviennent

$$\begin{cases} x'' = 2\omega\sin\theta \times y' + \lambda x \\ y'' = -2\omega\sin\theta \times x' + \lambda y \\ z = -L \end{cases}$$

5°. Nous obtenons un système d'équations différentielles linéaires $X' = AX$ que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega\sin\theta & -g/L & 0 \\ -2\omega\sin\theta & 0 & 0 & -g/L \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

6°. Résoudre le système précédent en diagonalisant A ; on posera $\alpha = \sqrt{g/L + \omega^2\sin^2\theta}$
En déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$.

7°. Démontrer que α est la pulsation du pendule. Déterminer le terme indiquant la rotation du plan d'oscillation du pendule et exprimer la période T d'oscillation. On a mesuré que $T = 31$ h 48 min . Calculer alors la latitude θ à laquelle se trouve Paris. En déduire également que Paris se trouve dans l'hémisphère nord.

XXIII Exercices de la banque d'épreuves.

Dans les questions suivantes, il s'agit de déterminer les valeurs et vecteurs propres des matrices. Lorsqu'elles sont diagonalisables, il faut en donner une base de vecteurs propres. Si une matrice n'est pas diagonalisable, on tentera de la trigonaliser. Des questions supplémentaires seront parfois demandées.

1°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2°. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 3°. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4°. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5°. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 6°. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 7°. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 8 & 7 & -7 \end{pmatrix}$ 8°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Questions supplémentaires concernant certaines des matrices ci-dessus :

2°. Résoudre le système différentiel correspondant à A et trouver la solution vérifiant $x(0) = 3, y(0) = 5, z(0) = 3$
7°. Résoudre le système se suites imbriquées correspondant à A et trouver la solution vérifiant $u_0 = 2, v_0 = 2, w_0 = 5$ d'une part, puis $u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 3$ d'autre part.