MATHEMATIQUES TD N°13 : DETERMINANTS - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I. Calculer les déterminants.

1°. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18$

2°. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+15) = 34$
en opérant $c_3 = c_3 - 2c_1$

3°. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

4°. $\begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix} = 10 \times 22 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
$= 660 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4620$

5°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$
$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & 0 & a-c \end{vmatrix}$
$= (a+b+c)(a-b)(a-c)$

6°. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$

7°. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$
car une des lignes est nulle (tout déterminant avec une ligne ou une colonne nulle est nul ; idem si un déterminant a deux lignes ou deux colonnes identiques).

8° . $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$
en permutant les colonnes 1 et 3, on trouve la matrice identité.

9° $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x(2-x^2)$

10°. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$
$= (x-1)(x^2+x+1)$

11°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

12°. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 120$
en effectuant le produit des termes diagonaux (car la matrice est triangulaire).

13°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 49$

14°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
$= -20 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 40$

15°. $\begin{vmatrix} 12 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 12 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 2160$

II. Pour quelles valeurs de m ces matrices sont-elles inversibles ?

1°. $\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$

$\det A = m(m-2)(m+2) \neq 0 \iff m \neq 0, \pm 2$

2°. $\begin{pmatrix} -1 & m & -2 \\ 2 & 2 & -m \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = (m-2)(-m-3) \neq 0 \iff m \neq -3, 2$

3°. $\begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 0 & 2 & 2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$

$\det C = 0 \iff C$ non inversible.

III. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°. $\Delta(x) = \begin{vmatrix} a-x & b & b \\ b & a-x & b \\ b & b & a-x \end{vmatrix}$
$= (a+2b-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b-x & 0 \\ b & 0 & a-b-x \end{vmatrix}$
$\Delta(x) = (a+2b-x)(a-b-x)^2 \Rightarrow \mathcal{S} = \{a+2b, a-b\}$

2°. $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{vmatrix}$
$= -x^2 = 0 \iff x = 0$

IV. Inverser les matrices.

1°. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = -1$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2°. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = -1$ et $B^{-1} = B$ car $B^2 = I$

3°. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det C = 1$ et $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4°. $D = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5°. $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/\alpha \\ -1 & 2 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$
E est inversible ssi $\alpha \neq 0$

V. Indépendance linéaire.

1°. (u_1, u_2, u_3) système linéairement dépendant car $\det(u_1, u_2, u_3) = 0$
2°. non car $2u + 3v = w$
3°. le déterminant vaut $y - x \neq 0 \iff x \neq y$

VI. Les points suivants sont-ils cocycliques ?

On construit le déterminant $\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$ et l'on teste sa nullité :

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
sans aucun calcul puisque deux colonnes sont identiques ; les points sont cocycliques.

2°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 34 \neq 0$ et les points ne sont pas cocycliques.

VII. Calculs de surfaces et de volumes.

1°. $\overrightarrow{AB}(2, -2)$, $\overrightarrow{AC}(3, 2)$. On calcule le déterminant $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$. De la même façon, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 15/2$

2°. $\mathcal{V} = |det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10$
De même,
$\mathcal{V} = |det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |-33| = 33$

VIII. Déterminant de Vandermonde

1°. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)$

2°. $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & x_1 - x_{n+1} & x_1^2 - x_{n+1}^2 & ... & x_1^n - x_{n+1}^n \\ 0 & x_2 - x_{n+1} & x_2^2 - x_{n+1}^2 & ... & x_2^n - x_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$
$= (-1)^n (x_1 - x_{n+1}) .... (x_n - x_{n+1}) \delta$ avec

$\delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_{n+1} & ... & (x_1^n - x_{n+1}^n)/(x_1 - x_{n+1}) \\ 1 & x_2 + x_{n+1} & ... & (x_2^n - x_{n+1}^n)/(x_2 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + x_{n+1} & ... & (x_n^n - x_{n+1}^n)/(x_n - x_{n+1}) \end{vmatrix}$

$\Delta_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \Delta'_n$ où Δ'_n est un déterminant d'ordre n dont on va expliciter les 2 dernières colonnes.
• La ligne i de la dernière colonne est
$x_i^{n-1} + x_i^{n-2} x_{n+1} + x_i^{n-3} x_{n+1}^2 + ... + x_{n+1}^{n-1} = \Delta'(i, n)$
• La ligne i de l'avant dernière est
$x_i^{n-2} + x_i^{n-3} x_{n+1} + ... + x_{n+1}^{n-2} = \Delta'(i, n-1)$
• $\Delta'(i, n) \to \Delta'(i, n) - x_{n+1} \Delta'(i, n-1)$
$\Rightarrow \Delta'_n = \prod_{i<j=1}^{n} (x_j - x_i)$ ce qui démontre la propriété.

IX. Matrices d'inertie.

1°. C'est une conséquence de la définition du produit mixte.

2°. Un vecteur directeur unitaire de la droite est donné par $\vec{n}(0, \sqrt{3}/2, 1/2)$; un point M de coordonnées $(0, 0, z)$ de la tige permet alors d'écrire

$det(\vec{n}, \overrightarrow{OM}, \vec{n} \wedge \overrightarrow{OM}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -\sqrt{3}/2z \\ 1/2 & z & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} z^2$

Alors $I_\Delta = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{3}{4} z^2 \, dm = \frac{ml^2}{16}$

X. Codes correcteurs.

1°. $d = 3$ car le déterminant formé des colonnes $1, 2, 4$ est nul et tous les déterminants extraits 2×2 sont $\neq 0$.
2°. $d = 4$ car le déterminant formé des colonnes $1, 2, 3, 7$ est nul et tous les déterminants 3×3 sont $\neq 0$.