MATHEMATIQUES TD N°13 : DETERMINANTS.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

1 Déterminants

I. Calculer :

1°. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2°. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 3°. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 4°. $\begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix}$ 5°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$

6°. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 7°. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 8°. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 9° $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$ 10°. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$

11°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 12°. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 13°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 14°. $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 15°. $\begin{vmatrix} 12 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 12 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

II. Pour quelles valeurs de m ces matrices sont-elles inversibles ?

1°. $\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ 2°. $\begin{pmatrix} -1 & m & -2 \\ 2 & 2 & -m \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3°. $\begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 0 & 2 & 2 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$

III. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°. $\begin{vmatrix} a-x & b & b \\ b & a-x & b \\ b & b & a-x \end{vmatrix} = 0 \ (a, b \in \mathbb{R})$ 2°. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

IV. Inverser les matrices :

1°. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ 2°. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3°. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4°. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5°. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

V. Indépendance linéaire.

1°. Les vecteurs $\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{v}(0,3,0)$ et $\vec{w}(-1,-1,-1)$ forment-ils un système libre de $\mathbb{R}^3$?
2°. Même question avec $\vec{u}(1,-1,1)$, $\vec{v}(0,0,1)$ et $\vec{w}(2,-2,5)$
3°. A quelle condition sur x et y les vecteurs $\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{v}(0,1,0)$ et $\vec{w}(x,1,y)$ sont-ils libres ?

VI. Les points suivants sont-ils cocycliques ?

1°. $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.
2°. $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(-2,3)$, $D(2,0)$.

VII. Calculs de surfaces et de volumes.

1°. Déterminer l'aire du triangle ABC avec : $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,4)$ puis $A(-2,2)$, $B(1,-3)$, $C(1,2)$

2°. Déterminer le volume du parallélépipède rectangle de sommets $O(0,0,0)$, $A(1,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(1,4,1)$
Idem avec $O(0,0,0)$, $A(-2,3,1)$, $B(0,1,0)$, $C(-4,3,2)$

VIII. Déterminant de Vandermonde.

1°. Soient a, b et c trois nombres réels ou complexes.Calculer $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

2°. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n nombres complexes et Ω_n la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ donnée par :

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On se propose de montrer par récurrence que $\Delta_n = det(\Omega_n) = \prod_{i<j=1}^{n} (x_i - x_j)$

- Retrancher la dernière ligne de Δ_{n+1} aux autres et développer par rapport à la 1ère colonne
- Pour chaque ligne i, factoriser le déterminant par $(x_{n+1} - x_i)$
- Retrancher à la dernière colonne l'avant dernière $\times x_{n+1}$, puis à la $(n-1)$ième la $(n-2)$ième $\times x_{n+1}$, etc...
- Conclure

4°. Expliciter Δ_4 à l'aide de la formule précédente.
5°. A quelle condition la matrice Ω_n est-elle inversible ?

IX. Matrices d'inertie.

Soient u, v, w trois vecteurs de l'espace (nous oublierons les flèches sur les vecteurs). On rappelle que le produit mixte de ces vecteurs est $[u, v, w] = u.(v \wedge w) = det(u, v, w)$. On rappelle également (cf. td sur le calcul matriciel) que le moment d'inertie d'un solide Σ par rapport à une droite Δ est

$$I_\Delta = \left(\int_\Sigma \overrightarrow{OM} \wedge \vec{n} \wedge \overrightarrow{OM} \; dm \right) \vec{n}$$

1°. Démontrer que $I_\Delta = \displaystyle\int_\Sigma det(\vec{n}, \overrightarrow{OM}, \vec{n} \wedge \overrightarrow{OM}) \; dm$

2°. Calculer le moment d'inertie d'une tige verticale de longueur l centrée en O, homogène, d'épaisseur négligeable, par rapport à la droite Δ passant par O dans le plan (yOz) et faisant un angle de $\pi/6$ avec (Oy).

X. Codes correcteurs.

On se reportera, pour les notations, au td précédent. On note H la matrice de contrôle d'un code correcteur. Sa distance minimale d est le plus petit nombre de colonnes de H qui sont liées. Cette distance minimale est une caractéristique très importante du code qui détermine son pouvoir correcteur.

1°. Déterminer la distance minimale du code défini par $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°. Idem avec la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

NB. Les déterminants ont beaucoup d'autres applications (résolution des systèmes linéaires, diagonalisation, calcul différentiel, etc.) que nous étudierons l'année prochaine.