MATHEMATIQUES TD N°1 : DENOMBREMENT - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2011/2012

I. Dénombrement élémentaire

1°. Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres si les répétitions sont autorisées, puis si elles ne le sont pas :

Avec répétition : 9×10^3 (le 0 ne peut pas être en premier sinon il s'agirait d'un nombre de 3 chiffres).
Sans répétition : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

2°. Combien de mots différents peut-on former avec toutes les lettres du mot MACHIN ?
Avec celles de TELECOMMUNICATIONS ?

Toutes les lettres du mot MACHIN sont distinctes. Un anagramme correspond à une permutation de l'ensemble des lettres. Il y a donc 6 !=5040 mots (sans signification particulière) possibles

On numérote les lettres communes afin de pouvoir les distinguer : $T_1E_1LE_2CO_1M_1M_2UNICAT_2IO_2NS$
Si l'on pouvait ainsi distinguer toutes les lettres, on aurait 18! mots possibles. Maintenant, les mots contenant aux mêmes places ...M_1...M_2... et ...M_2...M_1... ne peuvent pas être distingués si l'on enlève le marquage : il y en a deux fois moins. De la même façon, il diviser par 2! les mots contenant T_1 et T_2. Etc. Au final, le nombre total de mots est 18!/8

De façon plus générale, si l'on veut effectuer des permutations de n objets de r types différents avec n_i objets de chaque type (et l'on doit donc avoir $n_1 + ... + n_r = n$) alors le nombre de cas possibles est

$$\frac{n!}{n_1!...n_r!}$$

Il s'agit de permutations à répétitions. On peut aussi voir les permutations à répétition comme les rangements de n objets dans p boites avec n_i objets dans la boite i.

3°. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise 8 boules dans cette urne. Combien de tirages commenceront par 20 et se termineront par 1 ?

La première et la huitième sont fixes. Il reste six boules à choisir parmi 18 soit A_{18}^6

4°. Même question si les tirages se font avec remise :

A chaque tirage, on aura 20 possibilités. Un tirage correspond à une 6-liste d'un ensemble à 20 éléments. Il y en aura donc 20^6.

5°. Combien de mains de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 as et 2 cœurs ?

Il faut denombrer les mains qui contiennent l'as de cœur et celles qui ne le contiennent pas :

- Pour les mains contenant l'as de cœur, il y a 3 choix pour le second as et 7 choix pour le second cœur. Les deux dernières cartes sont à choisir parmi les C_{21}^2 cartes qui ne sont ni des as ni des coeurs.
- Pour les mains ne contenant pas l'as de cœur, il y a C_3^2 choix des 2 as et C_7^2 choix de deux cœurs. Il reste 2! façon de choisir la dernière carte.
- Au total : $3 \times 7 \times C_{21}^2 + C_3^2 \times C_7^2 \times 21 = 5733$

On a utilisé des combinaisons car une main est composée de cartes non ordonnées.

6°. La fabrication d'un objet suppose le passage par 4 machines A, B, C et D.
Combien y a-t-il de trajets possibles sachant que B doit intervenir avant C et D ?

- Si B est en premier, il y a $3! = 6$ façons de ranger A,C,D après.
- Si B est en second, alors A est en premier et il y a deux façons de classer C et D après.
- Au total, $6 + 2 = 8$ choix possibles.

7°. Un code est formé d'une lettre suivie d'un chiffre de 0 à 9. Combien existe-t-il de codes différents ?

Il y a 26 lettres. Le nombre de codes est $26 \times 10 = 260$. Si l'IUT contient 600 étudiants, il faudra rajouter un chiffre. On aura alors 2600 codes (trop facile).

8°. Sept garçons et dix filles se trouvent en boite. Combien de couples différents peut-on former si tous les garçons dansent (mal) ?

Un couple est un élément du produit cartésien de l'ensemble des garçons par celui des filles. Chaque fille peut choisir 7 garçons et il a donc $7 \times 10 = 70$ possibilités !

9°. Combien existe-t-il de mots binaires de n bits ayant un nombre de 1 inférieur ou égal à 3 ?

$1 + 23 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2049$

En effet, il existe C_{23}^k mots avec exactement k bits à 1 (et les autres à 0) : cela revient à choisir k cases parmi n.

10°. 50 étudiants doivent se partager pour aller à 3 spectacles de 20, 12 et 18 places. Combien y a-t-il de configurations différentes ?

Il s'agit encore d'une permutation à répétition : le nombre total est $\dfrac{50!}{20!12!18!}$
On peut considérer une configuration comme un mot de 50 lettres avec 20 A, 12 B et 18 C.

11°. Combien existe-t-il de tiercés et de quartés dans l'ordre, puis dans le désordre, lorsque 16 chevaux sont au départ ?

- Tiercés dans l'ordre : $A_{16}^3 = 16 \times 15 \times 14 = 3360$
- Tiercés dans le désordre : $C_{16}^3 = 16 \times 15 \times 14/6 = 560$
- Quartés dans l'ordre : $A_{16}^4 = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43680$
- Quartés dans le désordre : $C_{16}^4 = 16 \times 15 \times 14 \times 13/24 = 43680/24$

12°. Combien existe-t-il de numéros de téléphone à 10 chiffres, sachant que les deux premiers sont : $01, 02, 03, 04, 05, 06$ ou 08 ?

Il y a 7 possibilités pour les deux premiers chiffres et 10^8 pour les 8 chiffres suivants, soit 7×10^8

13°. Une enquête de 10 questions propose comme réponse oui, non ou bien sans opinion. Combien existe-t-il de réponses possibles ?

Il s'agit d'une 10-liste dans un ensemble à 3 éléments

(O,N,SO) ; il y a au total 3^{10} possibilités.

14°. On lance une pièce normale cinq fois de suite. Combien existe-t-il de configurations possibles ?

Une séquence est la donnée d'une 5-liste dans un ensemble à deux éléments : pile ou face. Il y a au total 2^5 possibilités.

15°. Une plaque d'immatriculation comporte 4 chiffres, 2 lettres et le numéro du département. Combien chaque département peut-il attribuer de numéros (les lettres DB, TT et WW sont réservées) ?

Il y a 10^4 possibilités pour les chiffres et $26^2 - 3$ pour les lettres. Au total $10^4 \times (26^2 - 2)$

16°. Un domino est formé de deux parties qui comporte un chiffre entre 0 et 6. Tous les dominos sont différents. Combien le jeu a-t-il de pièces ?

Un domino correspond à un couple non ordonné d'entier compris entre 0 et 6 ou bien à un double. Il y en a donc $C_7^2 = 21$ plus 7 doubles, soit 28..

II. Poker et dénombrement.

Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes. Chaque joueur possède une main constituée de 5 cartes. Dans une main, l'ordre n'a pas d'importance.

1°. Déterminer le nombre total de mains possibles.
Une main correspond à une combinaison de 5 cartes parmi 32 (l'ordre n'a pas d'importance) : Il y en a $C_{32}^5 = 201376$.

2°. Une paire est un groupe de 2 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec (exactement) une paire ?
On peut choisir la hauteur des deux cartes de la paire parmi les 8 hauteurs possibles : il y a 8 possibilités. Ensuite, on choisit 2 cartes parmi les 4 ayant la hauteur choisie, ce qui se fait de C_4^2 façons. On doit enfin choisir les hauteurs des 3 autres cartes parmi les 7 hauteurs restantes (de C_7^3 façons pour ne pas avoir deux fois la même hauteur, ce qui créerait une nouvelle paire) et pour chacune de ces 7 hauteurs, on doit prendre une carte parmi les 4 possibles, soit 4^3.
Au total, on a : $8 \times C_4^2 \times C_7^3 \times 4^3 = 107520$

3°. Une double paire est formée de deux paires. Combien existe-t-il de mains avec une double paire ?
De la même façon, on doit choisir deux hauteurs de cartes parmi huit de C_8^2 façons, puis pour chaque hauteur 2 cartes ayant cette hauteur, de C_4^2 façons et choisir enfin la dernière carte parmi les cartes restantes (il reste 6 hauteurs possibles de 4 cartes, soit 24).
Au total, on a : $C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times 24 = 24192$

4°. Un brelan est un groupe de 3 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un brelan ?
On choisit la hauteur du brelan parmi 8 puis les 3 cartes du brelan parmi 4, soit de C_4^3 façons. Les deux dernières cartes doivent correspondrent à 2 hauteurs différentes choisies parmi les 7 hauteurs restantes, soit C_7^2 façons de choisir, et l'on prend une des 4 cartes possibles.
Au total : $8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4 \times 4 = 10752$

5°. Un full est une main composée d'une paire et d'un brelan. Combien existe-t-il de fulls ?
Il faut choisir un brelan et une paire n'étant pas de même hauteur : On a $A_8^2 = 8 \times 7$ choix possibles de la hauteur du brelan et de la paire (on choisit, de façon non ordonnée, la valeur du brelan et celle de la paire) et C_4^3 façon de constituer le brelan, C_4^2 de constituer la paire.
Au total $A_8^2 \times C_4^3 \times C_4^2 = 1344$ possibilités.

6°. Une quinte est une main composée de cinq cartes de hauteurs consécutives. Combien existe-t-il de quintes ?
On doit choisir la carte haute parmi 4 cartes (A,R,D,V) et les suivantes sont alors fixées ; on ne peut choisir en dessous du valet si l'on veut 5 cartes successives ! Chaque carte peut-être choisie parmi les 4 de la hauteur considérée : cela fait 4^5 choix. Enfin, parmi toutes les combinaisons, il y a celles qui correspondent à une couleur et en ce cas, la quinte est une quinte flush qu'il faut retirer du décompte : il y a 16 quintes flush au total (4 choix de couleur et 4 choix de hauteur).
Le nombre de possibilités est donc de
$4 \times 4^5 - 16 = 4080$

7°. Un carré est un groupe de 4 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un carré ?
Le choix de la hauteur est 8 et la dernière carte est à choisir parmi les 28 cartes restantes, soit au total $8 \times 28 = 224$ cas possibles.

8°. Une couleur est une main de 5 cartes de même couleur et de valeurs différentes. Combien en existe-t-il ?
On choisit les 5 cartes dans des hauteurs différentes (de C_8^5 façons) et pour chaque hauteur, on a 2 choix possibles dans une couleur et 2 pour choisir cette couleur. La couleur peut-être une quinte-flush, et il faut donc retirer les 16 cas correspondants.
Au total, $C_8^5 \times 2 \times 2 - 16 = 208$

9°. Une quinte flush est une main de 5 cartes de hauteurs consécutives et de même couleur. Combien en existe-t-il ?
Il en existe 16 et nous avons déjà expliqué pourquoi plus haut ! !

10°. Combien existe-t-il de mains “banales” sans aucune figure ? On choisit 5 cartes de hauteurs différentes (pour éviter les paires, doubles paires, brelans, full et carrés) de $C_8^5 \times 4^5$ façons puis on retire les quintes, couleurs et quintes flush ; soit au total $C_8^5 \times 4^5 - 4080 - 208 - 16 = 53040$
On s'aperçoit que la somme de toutes les possibilités redonne bien les 201376 mains possibles.

III. Classes d'adresses IP.

Dans la norme IPv4, une adresse IP tient sur 32 bits et est représentée par 4 nombres décimaux séparés par un point (notation décimale pointée). On module la répartition des octets entre identifiant réseau (Net-ID) et identifiant machine (Host-ID) selon 5 classes différentes :

• Classe A : 1 octet est utilisé pour le réseau et 3 pour les machines. Le bit n° 0 est fixé à 0. Les adresses vont de 1.0.0.1 à 126.255.255.254
• Classe B : 2 octets sont utilisés pour le réseau et 2 pour les machines. Les deux premiers bits sont fixés à 10. Les adresses vont de 128.0.0.1 à 191.255.255.254

• Classe C : 3 octets sont utilisé pour le réseau et 1 pour les machines. Les trois premiers bits sont fixés à 110. Les adresses vont de 192.0.0.1 à 223.255.255.254
• Classe D : Les premiers bits sont fixés à 1110. Les octets suivants sont des octets de diffusion multicast. Les adresses vont de 224.0.0.0 à 239.255.255.255
• Classe E : Ces adresses sont réservées aux expérimentations.

Dans le protocole IPv6, les adresses ont été allongées et tiennent sur 128 bits.

1°. Quelles sont les valeurs possibles pour chaque nombre décimal d'une adresse IPv4 ?
Chaque point représente un octet, on aura donc $2^8 = 256$ valeurs possibles de 0 à 255.

2°. Combien de réseaux et combien de machines peuvent être adressées à l'aide d'une classe A ? B ? C ?
Dans une classe A, on a en principe $2^7 = 128$ réseaux possibles (un bit est fixe), mais les valeurs 0 et 127 étant réservées, il ne reste que 126 réseaux. Ensuite, on peut adresser $2^{24} = 16$ millions de machines environ.
Dans une classe B, on peut adresser $2^{14} = 16384$ réseaux de $2^{16} = 65536$ machines chacuns.
Dans une classe C, on peut adresser $2^{21} = 2$ millions de réseaux de 255 machines chacuns.

IV. Un peu de poésie.

Raymond Queneau a écrit un livre, publié en 1961, appelé "cent mille milliards de poèmes". Le livre compte 10 pages et chaque page est découpée en 14 bandes portant chacune un vers. Le lecteur doit former un poème régulier de 14 vers en choisissant un vers dans chacune des 10 pages. Un sonnet régulier compte 2 quatrains suivis de 2 tercets, soit 14 vers. Les vers du livre correspondant à chaque bande ont même scansion et même rime.

1°. Expliquer le titre du livre.
Chaque page laisse le choix de 14 vers ; au total on a donc, d'après le principe multiplicatif, 10^{14} ce qui représente bien cent mille milliards.

2°. Queneau ajoute qu'en comptant 45 secondes pour lire un sonnet et 15 secondes pour changer de pages et en supposant que l'on lise 24 heures par jour 365 jours par an, ce livre donnera des poèmes pour un million de siècles. Pourquoi ?
Faîtes le calcul ! Le temps pour lire tous les poèmes est $10^{14} \times (45 \times 10 + 15 \times 9)/(3600 * 24 * 365)$ en années. Cela fait environ 10^9 siècles.

V. Jackpot

1°. Nombre de configurations possibles : 12^3

2°. Nombre de configurations avec trois fois le même symbole : 12

3°. Avec trois symboles distincts : $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10$

4°. Avec un symbole qui apparaît exactement deux fois : $3 \times 12 \times 11 = 396$
Il y a 12 choix des deux symboles, 11 choix du dernier et 3 façons de les placer.

VI. Chemins entre deux points

1°. Pour aller de A vers B, il faut aller 4 fois vers le haut et 8 fois vers la droite, soit 12 déplacements. On choisit la position des 4 déplacements vers le haut de C_{12}^4 façons. Les déplacements vers la droite sont alors fixés (il n'y a pas de choix à faire). Si l'on raisonne de la même façon avec les déplacements vers la droite en premier, on trouve C_{12}^8 façons (les deux sont égaux).

2°. On suppose maintenant que le quadrillage a une taille de n cases en abscisse comme en ordonnée. En comptant de deux façons différentes le nombre de plus courts chemins de $(0,0)$ à (n,n).
On choisit un point de coordonnées $(k, n-k)$ sur le damier (il se trouve sur l'anti-diagonale). On évalue le nombre de chemins de $(0,0)$ vers ce point, puis de ce point vers (n,n). Ensuite on fait varier k de 0 à n.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$$

3°. Retrouver ce résultat en considérant le nombre de tirages sans remise de n boules parmi $2n$.

Pour choisir ces n boules, on coupe en deux parties de cardinal n l'ensemble des $2n$ boules et l'on choisit k boules dans la première partie de C_n^k façons, puis $n-k$ dans la seconde partie de $C_n^{n-k} = C_n^k$ façons. Pour une valeur fixée de k, on a donc $C_n^k \times C_n^k$ choix possibles et en faisant varier k de 0 à n on obtient toutes les manières de choisir n boules parmi $2n$. D'où la formule.

4°. On se place maintenant dans un quadrillage de n cases sur k cases. Considérons un point intermédiaire de coordonnées (i, m) avec $0 \leq m \leq n$ et $0 \leq i \leq k$. Déterminer le nombre de plus courts chemins allant de $(0,0)$ à (n,k) en passant par (i,m). En déduire que

$$C_n^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_{n-m}^{k-i} = \sum_{m=0}^{n} C_{m-1}^{i-1} C_{n-m}^{k-i}$$

Le principe est le même que dans la question précédente. On choisit un point (i,m) dans le quadrillage et l'on évalue le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,k) et passant par ce point. Il y en a $C_m^i C_{n-m}^{k-i}$. On regarder ensuite toutes les positions possibles de ce point intermédiaire en faisant varier i et m. La formule en découle.

5°. Retrouver ce résultat en utilisant l'égalité $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$
On utilise successivement cette formule avec $p = m$ et $q = n - m$ puis $p = i$ et $q = k - i$. En développant les deux membres, on examine le coefficient d'ordre i ou m et l'on conclut.

VII. Code correcteur.

Un code correcteur transforme un vecteur binaire de k coordonnées en un vecteur binaire de n coordonnées (avec $n \geq k$). Ces vecteurs sont ensuite transmis sur un canal brouillé qui peut transformer les 1 en 0 ou les 0 en 1. La capacité de correction t d'un code est le nombre maximal d'erreurs qu'il peut corriger. Le poids de Hamming d'un vecteur est le nombre de 1 contenu dans ce vecteur. De la même façon, le poids d'une erreur est le nombre de bits erronés durant une transmission.

1°. Combien existe-t-il de vecteurs possibles avant le codage ? Combien existe-t-il de vecteurs possibles

après le codage ? Parmi ces vecteurs, combien correspondent à des transmissions erronées ?
avant codage, les vecteurs fon k bits, soit 2^k vecteurs possibles. Après le codage, les vecteurs font n bits, soit 2^n vecteurs possibles. Parmi ces vecteurs, seuls 2^k correspondent à des vecteurs envoyés et il y a donc $2^n - 2^k$ vecteurs erronés possibles.

2°. Démontrer que le nombre d'erreurs de poids i dans un vecteur à n coordonnées est C_n^i.
Une erreur correspond à un bit changé. i erreurs correspondent donc à i coordonnées modifiées dans un vecteur de longueur n. Choisir les i positions d'erreur revient donc à choisir la place de i objets parmi n, soit C_n^i.

3°. Si t est la capacité de correction du code, en déduire que

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^t \leq 2^{n-k}$$

Un code est parfait si cette inégalité devient une égalité. Expliquer ce que cela signifie.

Si le code peut corriger toute erreur d'ordre inférieure ou égale à t, alors il peut corriger toutes les erreurs d'ordre $0, 1, ..., t$. Il peut donc corriger au total la quantité donnée ci-dessus. Cette quantité est forcément inférieure à 2^{n-k} qui représente le nombre total d'erreurs possibles. Lorsque l'on a une égalité, cela veut dire que toute erreur d'ordre inférieure à t sera corrigée.

VIII. Autour d'une table - et d'un verre -

De combien de façon peut-on disposer $2n$ personnes (n hommes et n femmes) :
1°. Sur un banc contenant $2n$ places.

$(2n)!$ façons.

2°. Autour d'une table ronde de $2n$ places.

$(2n)!/(2n) = (2n-1)!$ façons car il existe $2n$ permutations circulaires des personnes.

3°. En supposant dans les deux cas que les hommes et les femmes sont alternés.

On place les n hommes de $n!$ façons et les n femmes de $n!$ façons. En considérant les places paires ou impaires, on obtient $2(n!)^2$ façons. Si la table est circulaire : $\dfrac{2n!^2}{2n} = n!(n-1)!$

IX. Rolland Garros 2007

Soit $\phi(2n)$ le nombre de façons d'organiser le premier tour d'un tournoi de tennis comportant $2n$ participants.

1°. Montrer que $\phi(2) = 1$, $\phi(4) = 2\phi(2)$, $\phi(6) = 5\phi(4)$
S'il n'y a que deux joueurs, un seul match suffira : $\phi(2) = 1$. S'il y en a 4, il y a 3 façons de créer des couples (l'un des joueurs a trois choix et ce choix détermine tous les matchs du premier tour) et s'il y en a 6, on aura $C_6^2 = 15 = 5 \times 3$ possibilités.

2°. Montrer que $\forall n \geq 1, \phi(2n) = (2n-1)\phi(2n-2)$
Si l'on a $2n$ joueurs, on choisit l'un d'entre eux au hasard. Il peut avoir $2n-1$ adversaires et pour chacun de ces $2n-1$ choix, il reste $2n-2$ joueurs qui doivent choisir leur adversaire. D'où la formule.

3°. En déduire que $\phi(n) = \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$
Nous avons donc

$$\begin{cases} \phi(2) = 1 \\ \phi(4) = 3\phi(2) \\ ... \\ \phi(2n-2) = (2n-3)\phi(2n-4) \\ \phi(2n) = (2n-1)\phi(2n-2) \end{cases}$$

Effectuons le produit terme à terme de toutes ces égalités. Après simplification, il vient :
$\phi(2n) = (2n-1) \times (2n-3) ... \times 3 \times 1$
$= (2n)!/((2n)(2n-2)(2n-4)....4.2)$ Mettons 2 en facteur de chaque terme du dénominateur, on obtient $2^n \times n!$ ce qui donne la formule.

4°. Démontrer directement cette formule en remarquant qu'à toute permutation des $2n$ joueurs, on peut associer les parties opposant au 1er le 2nd, au 3ème le 4ème, etc... mais que le résultat n'est pas modifié par échange des joueurs dans chacune des parties ou par permutation de celles ci.

Il existe $(2n)!$ permutations des $2n$ joueurs. Dans ces permutations, on classe les joueurs par paquets de 2. Il reste n paquets que l'on peut classer de $n!$ façons et ces paquets correspondent à un match. Enfin, dans chaque paquet, la permutation des 2 joueurs ne change rien au nombre de possibilités de matchs. Il reste donc $(2n)!/(2^n \times n!)$ matchs possibles.

X. Propriétés des combinaisons.

1°. Démontrer que $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ pour $0 < k \leq n$ et que $C_n^k = \dfrac{n}{n-k} C_{n-1}^k$ pour $0 \leq k < n$

$$C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)(n-1-k+1)!} = \frac{n}{k} C_n^k$$

Pour la seconde formule, il suffit d'appliquer $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2°. En utilisant $P(x) = (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$$

Il suffit d'appliquer la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (-1+1)^n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = (2+1)^n = 3^n$$

$P'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$ en posant $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

De la même façon, intégrons $P(x)$ entre 0 et x. On trouve $Q(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$.

On pose $x = -1$ et l'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

3°. En utilisant $Q(x) = (1+x)^{2n}$ démontrer que $C_n^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$

Développons $Q(x)$. Le terme d'ordre n dans le développement vaut C_{2n}^n. Par ailleurs, $Q(x) = (1+x)^n(1+x)^n$. Le terme d'ordre n dans le double produit est obtenu partir du terme d'ordre k dans le développement de $(1+x)^n$ et du terme d'ordre $n-k$ dans le second développement de $(1+x)^n$. En faisant varier k de 0 à n, on trouve toutes les combinaisons possibles. D'où la formule.

4°. Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de :

$$\begin{cases} S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... \\ T_n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 + ... \end{cases}$$

$(1+i)^n = 2^{n/2}\exp(n\pi i/4)$ Par ailleurs, en développant suivant la formule du binôme, $(1+i)^n = \sum_k C_n^k i^k$
En séparant partie réelle (correspondant aux termes avec k pair) et partie imaginaire (correspondant aux termes avec k impair), il vient
$2^{n/2}\exp(n\pi i/4) = S_n + iT_n$ donc

$$S_n = 2^{n/2}\cos(n\pi/4)$$

$$T_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$$

XI. Résoudre dans $\mathbb{N}$.

1°. $C_n^2 + C_n^3 = 4$
D'après la formule de Pascal,
$C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3 = (n-1)n(n+1)/6$
Cette quantité est égale à 4 si, par exemple, $n = 3$.
Est-ce la seule solution entière ?
$n(n-1)(n+1) = 24 \iff n^3 - n - 24 = 0$ et en factorisant, on obtient
$n^3 - n - 24 = (n-3)(n^2+3n+8)$ qui n'a pas de racines réelles réelles. 3 est donc la seule solution.

2°. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$
$\iff n(n-1) + n(n-1)(n-2) = 9n \iff$
$n(n^2 - 2n - 8) = 0$
La solution doit être entière et ≥ 3. Le polynôme du second degré a une racine négative et 4 comme seconde racine. On a donc $\mathcal{S} = \{4\}$

3°. $7C_n^2 = 2C_{n+10}^2$
$\iff 7n^2 - 7n = 2(n^2 + 19n + 90)$
$\iff n^2 - 9n - 36 = 0$ La seule solution entière positive est 12.

4°. $C_{n+5}^3 = 3C_{n+3}^2$
$\iff (n+5)(n+4)(n+3)/6 = 3(n+3)(n+2)/2$
$\iff (n+5)(n+4) = 9(n+2) \iff n^2+2 = 0.$
Il n'y a donc pas de solutions.

5°. $A_{2n}^2 - 25 = A_n^2$
$\iff 3n^2 - n - 25 = 0$ dont le discriminant vaut 301.
Ce nombre n'étant pas un carré, il n'y a pas de solution entière.

XII. Démontrer que :

1°. $C_{n+1}^p = \sum_{k=1}^{p} C_{n-k}^{p-k}$
2°. $3C_n^4 = C_{C_n^2}^2 - nC_{n-1}^2$
3°. $\prod_{k=1}^{n} C_n^k = \dfrac{n!^n}{(1! \times 2! \times ... \times n!)^2}$

XIII.

1°. Soit $P(x) = (1+x)^n$. Calculer $P'(x)$ puis $P''(x)$
2°. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$

XIV.

Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$
Calculer ces sommes en posant
$U_n(x) = S_n(x) + iT_n(x)$

XV. Linéariser les expressions suivantes.

1°. $\cos^4 x$ 2°. $\cos^6 x \sin^2 x$ 3°. $\cos x \sin^5 x$

XVI. Déterminants.

Calculer le déterminant de la matrice carrée $n \times n$ donnée par $M_n(k) = (C_{k+j}^i)_{i,j=0,..,n-1}$

XVII. Portions de cercle

On considère n points distincts sur un cercle et l'on trace tous les segments joignant deux de ces points. On suppose que trois segments ne sont jamais concourants. On s'intéresse au nombre u_n de régions ainsi définies dans le cercle.

1°. Faire un dessin et calculer u_2, u_3, u_4 et u_5. Quelle sera, d'après vous, la valeur de u_6 ?
2°. En faisant soigneusement le dessin, trouver u_6.
3°. Calculer u_n pour tout entier n.

XVIII. Formule du crible.

1°. Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des ensembles finis. Démontrer que

$$\mathrm{Card}(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} \mathrm{Card}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_k})$$

2°. Dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ écrire et reconnaitre cette formule.

XIX. Dérangements et théorème des chapeaux.

Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation est totalement désordonnée si elle ne possède pas de point fixe (on dit aussi un dérangement) : après permutation, aucun élément n'est resté à sa place. Soit D_n le nombre de ces permutations.

1°. Combien existe-t-il de permutations circulaires sur cet ensemble ?

2°. Montrer que pour $n \geq 3$,
$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

3°. En déduire que $D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{n!}{k!}$

4°. Retrouver ce résultat à l'aide de la formule du crible.

5°. En déduire que $D_n \sim n!/e$ lorsque n tend vers $+\infty$

6°. n personnes posent leur chapeau en entrant dans une salle et en reprennent un au hasard en repartant. Calculer la probabilité pour qu'aucun d'entre eux ne retrouve son chapeau, lorsque $n \to +\infty$.

XX. Mots de Gauss.

Un n-mot de Gauss est un vecteur $(x_1, ..., x_n)$ tel que $x_i \in \{1, 2, ..., n\}$ et chaque entier de $\{1, 2, ..., n\}$

apparaît exactement deux fois dans les coordonnées (par exemple 1313 ou 234342). Montrer que le nombre de n-mots est $(2n)!/2^n$

XXI. Escalier.

De combien de façon peut-on monter un escalier de n marches en franchissant à chaque fois soit une marche, soit deux marches ?

XXII. Principe du pigeonnier.

1° Soit E un ensemble de $n+1$ éléments. Soit $(E_1, ..., E_n)$ une partition de E.
Montrer que l'un au moins des E_i contient plus d'un élément.

2°. Soit $x \in [0,1]$. On notera $[x]$ sa partie entière et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire.
On pose $\Lambda(x) = \{\{qx\};\ q = 0, ..., N\}$. En utilisant $\Lambda(x)$, construire une partition de $[0,1[$ en N intervalles.

3°. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists\, (p,q) \in \mathbb{N}\times\{1,...,n\} / \ \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

XXIII. Polygone.

Combien un polygone convexe à n côtés possède-t-il de diagonales ?

XXIV. Autour de l'échiquier.

1°. La légende veut que l'inventeur du jeu d'échec ait été invité par l'empereur de Chine ou d'Inde (cela varie selon les auteurs, mais comme on n'est pas certain de l'origine des échecs cela importe peu...). L'empereur demande à l'inventeur ce qu'il souhaite pour le féliciter de son invention et celui-ci demande du riz : 1 grain sur la 1ère case, 2 sur la seconde, et le double à chaque nouvelle case.
Calculer le nombre total de grains de riz que demande l'inventeur. La production mondiale de riz s'élevait en 2006 à un peu moins de 700 millions de tonnes. Sachant que 1000 grains de riz pèsent environ 15 grammes, calculer le poids total des grains sur l'échiquier et conclure.
2°. De combien de façons peut-on disposer 8 tours sur un échiquier de 64 cases de telle sorte qu'aucune d'elles ne soit menacée par les autres ?
3°. Même question pour deux tours.
4°. Généraliser pour k tours où $1 \leq k \leq 8$

XXV. Cardinal d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments.

1°. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties distinctes de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Soit $A \subset E$ de cardinal k. Les parties B de E disjointes de A sont les parties du complémentaire de A qui sont de cardinal $n-k$. Leur nombre est 2^{n-k}. En faisant varier k de 0 à n on obtient tous les couples. On doit retirer $(\emptyset, \emptyset)$. Les couples apparaissent deux fois et le nombre de couples cherché est donc

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}\right) = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

2°. Quel est le nombre de couples vérifiant $A \subset B$?

Soit B un sous ensemble de E de cardinal k. Il existe 2^k parties A de E contenues dans B. Le nombre de couples est donc

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = 3^n$$

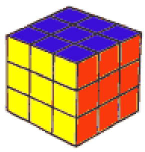
3°. Généraliser à p parties $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_p$?

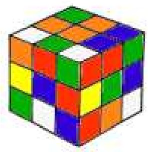
Soit l'hypothèse de récurrence "le nombre de familles de $p-1$ parties $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_{p-1}$ d'un ensemble de cardinal m est p^m"
Cette hypothèse est vraie si $p = 2$ ou $p = 3$.
Soit $A_p \subset E$ de cardinal k. Il existe p^k familles telles que $A_1 \subset .. \subset A_p$. Le nombre total est donc

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k = (p+1)^n$$

XXVI. Analyse combinatoire du Rubik's cube.

Le Rubik's cube est un cube dont chaque face est formée de 9 petits cubes initialement de même couleur. Chaque face peut effectuer une rotation autour du cube centrale. On souhaite calculer le nombre total de configurations possibles de ce cube.





1°. Calculer le nombre de positions possibles des cubes se trouvant à chaque sommet, en tenant compte des orientations possibles de ces cubes.
2°. Calculer le nombre de positions possibles des cubes se trouvant au milieu des arêtes, en tenant compte également des orientations possibles.
3°. Evaluer les contraintes sur l'orientation des cubes et en déduire le nombre total de configurations possibles.

QCM de concours

1996

1°. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (-1)^k C_{20}^{2k}$
$= C_{20}^0 - C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... - C_{20}^{18} + C_{20}^{20} = -1024$
2°. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on a
$n(x+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-1}$

3°. Pour tout entier naturel n, on a
$n(1+i)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k i^{k-1}$

4°. $-2C_{13}^2 + 4C_{13}^4 - 6C_{13}^6 + 8C_{13}^8 - 10C_{13}^{10} + 12C_{13}^{12} = 0$

5°. Pour tous les entiers naturels n et p, on a
$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$

6°. Pour tous les entiers naturels n et p, on a
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

7°. Pour tout entier naturel k, on a $k^2 = 3C_k^2 + C_k^1$
8°. Pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2$$
9°. Pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = 2C_{n+1}^3$$

2000

Soient n et p deux entier naturels non nuls.
On dispose de n jetons identiques, alignés, entre lesquels on va disposer des séparateurs afin de les regrouper en tas numérotés de 1 à p, chaque tas comportant au moins un jeton.
On notera k_p le nombre de jetons dans le pième tas.
Dans le tas i, on peut avoir $1 \leq k_i \leq n$ mais $k_1 + ... + k_p = n$
On note $T(n,p)$ le nombre total de telles répartions en tas. Ici, l'ordre des tas compte.

1°. $T(n,2) = n - 1$
2°. Il faut $n-1$ séparateurs pour délimiter p tas.
3°. Il y a n emplacements possibles pour chaque séparateur.
4°. $T(n,p) = C_n^{p-1}$
5°. $T(n,p) = T(n-1,p) + T(n-1,p-1)$

On dispose dans cette question de n jetons identiques que l'on veut maintenant ranger dans p boites numérotées de 1 à p. On note $R(n,p)$ le nombre total de tels rangements.

1°. Le nombre s de décompositions vérifiant $k_p = k$ est $R(n-k,p)$
2°. $R(n,p) = \sum_{k=0}^{n} R(n-k,p-1)$
3°. Pour un rangement de n pions dans p boites, en ajoutant un jeton à chaque boite, on obtient une répartition de $n+p$ jetons dans p boites non vides.
4°. $R(n,p) = T(n+p,p)$
5°. $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 = C_8^5$

1997

On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathcal{P}$ de 10 points distincts situés sur ce cercle et numérotés de 1 à 10.
Pour chaque paire de points distincts $\{i,j\}$ de $\mathcal{P}$, on considère la droite $D_{i,j}$ passant par ces deux points.
On suppose que les points sont répartis sur $\mathcal{C}$ de telle sorte que deux droites quelconques $D_{i,j}$ et $D_{u,v}$ ne sont jamais parallèles, et que, pour tous les choix possibles de quatre points distincts (i,j,u,v), les points d'intersections $D_{i,j} \cap D_{u,v}$ sont tous distincts.

Pour deux droites distinctes définies par 4 points distincts de $\mathcal{P}$, on peut avoir un point d'intersection situé à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

1°. Il y a exactement 90 droites $D_{i,j}$ distinctes (avec $i \neq j$)
2°. Il y a exactement 210 quadruplets (i,j,u,v) formés de quatre points tels que $i < j < u < v$
3°. A chaque quadruplet (i,j,u,v) tel que $i < j < u < v$ correspond une et une seule apire de droites se coupant à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$.
4°. En considérant toutes les paires de droites du type $\{D_{i,j}, D_{u,v}\}$, on trouve 210 points d'intersection situés strictement à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$
5°. En considérant toutes les paires de droites du type $\{D_{i,j}, D_{u,v}\}$, on trouve 210 points d'intersection situés strictement à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$