I Dénombrement élémentaire.

1°. Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres si les répétitions sont autorisées, puis si elles ne le sont pas.
2°. Combien de mots différents peut-on former avec toutes les lettres du mot MACHIN ?
Avec celles de TELECOMMUNICATIONS ?
3°. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise 8 boules dans cette urne.
Combien de tirages commenceront par 20 et se termineront par 1 ?
4°. Même question si les tirages se font avec remise.
5°. Combien de mains de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 as et 2 coeurs ?
6°. La fabrication d'un objet suppose le passage par 4 machines A, B, C et D.
Combien y a-t-il de trajets possibles sachant que B doit intervenir avant C et D ?
7°. Un code est formé d'une lettre suivie d'un chiffre entre 0 et 9. Combien existe-t-il de codes différents ?
L'IUT devant accueillir 600 étudiants, on allonge le code en ajoutant autant de chiffres que nécessaire.
Combien ?
8°. Sept garçons et dix filles se trouvent en boite. Combien de couples différents peut-on former si tous les garçons dansent (mal) ?
9°. Combien existe-t-il de mots binaires de n bits ayant un nombre de 1 inférieur ou égal à 3 ?
10°. 50 étudiants doivent se partager pour aller à 3 spectacles de 20, 12 et 18 places. Combien y a-t-il de configurations différentes ?
11°. Combien existe-t-il de tiercés et de quartés dans l'ordre, puis dans le désordre, lorsque 16 chevaux sont au départ ?
12°. Combien existe-t-il de numéros de téléphone à 10 chiffres, sachant que les deux premiers sont :
$01, 02, 03, 04, 05, 06, 08$ ou 09 ?
13°. Une enquête de 10 questions propose comme réponse oui, non ou bien sans opinion. Combien existe-t-il de réponses possibles ?
14°. On lance une pièce normale cinq fois de suite. Combien existe-t-il de configurations possibles ?
15°. Une plaque d'immatriculation comporte 4 chiffres, 2 lettres et le numéro du département. Combien chaque département peut-il attribuer de numéros (les lettres DB, TT et WW sont réservées) ?
16°. Le nouveau système d'immatriculation SIV comporte 2 lettres suivies de 3 chiffres, puis de 2 lettres et enfin du numéro du département. Les deux lettres de gauche ne peuvent pas être égales à WW ou SS et les deux lettres de droite ne peuvent pas être égales à SS. De plus, les lettres I, O et U ne sont pas autorisées.
Enfin, le nombre de 3 chiffres commence à 001. Combien de plaques différentes peut-on créer ?
17°. Un domino est formé de deux parties qui comporte un chiffre entre 0 et 6. Tous les dominos sont différents. Combien le jeu a-t-il de pièces ?
18°. De combien de façon peut-on organiser un jury de concours de 5 personnes formé de 3 industriels et 2 enseignants, sachant que 10 industriels et 8 enseignants sont volontaires pour en faire partie ?
19°. Avec les lettres du mot LIVRE, combien de mots de 5 lettres peut-on former, ayant un sens ou non : Au total ? Commençant et finissant par une voyelle ? Commençant et finissant par une consonne ? Commençant par une voyelle et finissant par une consonne ? Commençant par une consonne et finissant par une voyelle ?
20°. Reprendre toutes ces questions avec le mot CONCOURS.
21°. Une baie de brassage contient 50 prises RJ45. Combien de connexions différentes peut-on former avec toutes ces prises ?
22°. Déterminer le nombre d'octets se terminant par 1000, se terminant par 100, commençant par 100, contenant 100, contenant exactement quatre 0.

II Codes secrets.

1°. Un mot de passe comprend 10 caractères choisis parmi les 36 caractères alphanumériques du code ascii.
Dans ce code, on trouve trois fois le chiffre 0 mais on ne sait pas à quelle position. Combien existe-t-il de mots de passe possibles ?
2°. Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent trois caractères $\sharp$ mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes différents ?
3°. La clef secrète utilisée dans l'algorithme AES fait 256 bits. Combien existe-t-il de clefs possibles ?

III Pannes.

Les pannes d'un appareil électronique sont visualisées à l'aide d'un tableau de 8 leds numérotées de 1 à 8. En fonction de la nature de la panne, une ou plusieurs leds s'allument.

1°. Combien ce panneau permet-il de répertorier de pannes différentes ?
2°. Combien de pannes existe-t-il avec exactement 4 leds d'allumées ? Avec moins de 4 leds d'allumées ?

3°. Le technicien doit taper un code de 4 chiffres pour accéder au menu de diagnostic. La touche 5 est presque effacée (un ou plusieurs 5 sont donc présents dans ce code). Combien reste-t-il de codes à tester ?

IV Poker et dénombrement.

Le poker se joue avec un jeu de 32 ou 52 cartes. Chaque joueur possède une main constituée de 5 cartes. Dans une main, l'ordre n'a pas d'importance.Une carte se caractérise par sa hauteur et par sa couleur (coeur, carreau, trêfle, pique). On suppose ici que l'on travaille avec un jeu de 32 cartes.

1°. Déterminer le nombre total de mains possibles.
2°. Une paire est un groupe de 2 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec une paire ?
3°. Une double paire est formée de deux paires. Combien existe-t-il de mains avec une double paire ?
4°. Un brelan est un groupe de 3 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un brelan ?
5°. Un full est une main composée d'une paire et d'un brelan. Combien existe-t-il de fulls ?
6°. Une quinte est une main composée de cinq cartes de hauteurs consécutives. Combien existe-t-il de quintes ?
7°. Un carré est un groupe de 4 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un carré ?
8°. Une couleur est une main de 5 cartes de même couleur et de valeurs différentes. Combien en existe-t-il ?
9°. Une quinte flush est une main de 5 cartes de hauteurs consécutives et de même couleur. Combien en existe-t-il ?
10°. Combien existe-t-il de mains "banales" sans aucune figure ?

V Classes d'adresses IP.

Dans la norme IPv4, une adresse IP tient sur 32 bits et est représentée par 4 nombres décimaux séparés par un point (notation décimale pointée). On module la répartition des octets entre identifiant réseau (Net-ID) et identifiant machine (Host-ID) selon 5 classes différentes :

• Classe A : 1 octet est utilisé pour le réseau et 3 pour les machines. Le bit n° 0 est fixé à 0. Les adresses vont de 1.0.0.1 à 126.255.255.254
• Classe B : 2 octets sont utilisés pour le réseau et 2 pour les machines. Les deux premiers bits sont fixés à 10. Les adresses vont de 128.0.0.1 à 191.255.255.254
• Classe C : 3 octets sont utilisé pour le réseau et 1 pour les machines. Les trois premiers bits sont fixés à 110. Les adresses vont de 192.0.0.1 à 223.255.255.254
• Classe D : Les premiers bits sont fixés à 1110. Les octets suivants sont des octets de diffusion multicast. Les adresses vont de 224.0.0.0 à 239.255.255.255
• Classe E : Ces adresses sont réservées aux expérimentations.

Dans le protocole IPv6, les adresses ont été allongées et tiennent sur 128 bits.

1°. Quelles sont les valeurs possibles pour chaque nombre décimal d'une adresse IPv4 ?
2°. Combien de réseaux et combien de machines peuvent être adressées à l'aide d'une classe A ? B ? C ?

VI Un peu de poésie.

Raymond Queneau a écrit un livre, publié en 1961, appelé "cent mille milliards de poèmes". Le livre compte 10 pages et chaque page est découpée en 14 bandes portant chacune un vers. Le lecteur doit former un poème régulier de 14 vers en choisissant un vers dans chacune des 10 pages. Un sonnet régulier compte 2 quatrains suivis de 2 tercets, soit 14 vers. Les vers du livre correspondant à chaque bande ont même scansion et même rime.

1°. Expliquer le titre du livre.

2°. Queneau ajoute qu'en comptant 45 secondes pour lire un sonnet et 15 secondes pour changer de pages et en supposant que l'on lise 24 heures par jour 365 jours par an, ce livre donnera des poèmes pour un million de siècles. Pourquoi ?

VII Jackpot.

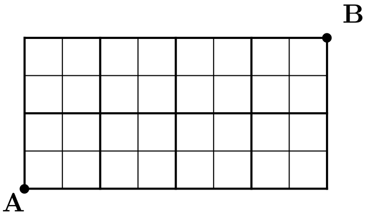
Il est composé de trois fenêtres où peuvent apparaitre un symbole choisi parmi 12. Exemple :

$\clubsuit$	¥	$\circledast$

1°. Nombre de configurations possibles ?
2°. Nombre de configurations avec trois fois le même symbole ?
3°. Avec trois symboles distincts ?
4°. Avec un symbole qui apparaît exactement deux fois ?

VIII Chemins entre deux points.

1°. Dans le dessin ci-après, combien existe-t-il de plus courts chemins menant du coin inférieur gauche A au coin supérieur droit B en n'utilisant comme chemin que les arêtes des carrés ?



2°. On suppose maintenant que le quadrillage a une taille de n cases en abscisse comme en ordonnée. En comptant de deux façons différentes le nombre de plus courts chemins de $(0,0)$ à (n,n), montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$$

3°. Retrouver ce résultat en considérant le nombre de tirages sans remise de n boules parmi $2n$.

4°. On se place maintenant dans un quadrillage de n cases sur k cases. Considérons un point intermédiaire de coordonnées (i,m) avec $0 \leq m \leq n$ et $0 \leq i \leq k$. Déterminer le nombre de plus courts chemins allant de $(0,0)$ à (n,k) en passant par (i,m). En déduire que

$$C_n^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_{n-m}^{k-i} = \sum_{m=0}^{n} C_{m-1}^{i-1} C_{n-m}^{k-i}$$

5°. Retrouver ce résultat en utilisant l'égalité $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$

IX Code correcteur.

Un code correcteur transforme un vecteur binaire de k coordonnées en un vecteur binaire de n coordonnées (avec $n \geq k$). Ces vecteurs sont ensuite transmis sur un canal brouillé qui peut transformer les 1 en 0 ou les 0 en 1. La capacité de correction t d'un code est le nombre maximal d'erreurs qu'il peut corriger. Le poids de Hamming d'un vecteur est le nombre de 1 contenu dans ce vecteur. De la même façon, le poids d'une erreur est le nombre de bits erronés durant une transmission.

1°. Combien existe-t-il de vecteurs possibles avant le codage ? Combien existe-t-il de vecteurs possibles après le codage ? Parmi ces vecteurs, combien correspondent à des transmissions erronées ?
2°. Démontrer que le nombre d'erreurs de poids i dans un vecteur à n coordonnées est C_n^i.
3°. Si t est la capacité de correction du code, en déduire que

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^t \leq 2^{n-k}$$

Un code est parfait si cette inégalité devient une égalité. Expliquer ce que cela signifie.

X Autour d'une table - et d'un verre -

De combien de façon peut-on disposer $2n$ personnes (n hommes et n femmes) :
1°. Sur un banc contenant $2n$ places.
2°. Autour d'une table ronde de $2n$ places.
3°. En supposant dans les deux cas que les hommes et les femmes sont alternés.

XI Rolland Garros 2010.

Soit $\phi(n)$ le nombre de façons d'organiser le premier tour d'un tournoi de tennis comportant $2n$ participants.

1°. Montrer que $\phi(2) = 1$, $\phi(4) = 2\phi(2)$, $\phi(6) = 5\phi(4)$

2°. Montrer que $\forall n \geq 1, \phi(2n) = (2n-1)\phi(2n-2)$

3°. En déduire que $\phi(n) = \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$

4°. Démontrer directement cette formule en remarquant qu'à toute permutation des $2n$ joueurs, on peut associer les parties opposant au 1er le 2nd, au 3ème le 4ème, etc... mais que le résultat n'est pas modifié par échange des joueurs dans chacune des parties ou par permutation de celles ci.

XII Propriétés des combinaisons.

1°. Démontrer que $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ pour $0 < k \leq n$ et que $C_n^k = \dfrac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}$ pour $0 \leq k < n$

2°. En utilisant $P(x) = (1+x)^n$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$

3°. En utilisant $Q(x) = (1+x)^{2n}$ démontrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$

4°. Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de :

$$\begin{cases} S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... \\ T_n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 + ... \end{cases}$$

5°. Démontrer que $C_{n+1}^p = \sum_{k=1}^{p} C_{n-k}^{p-k}$

6°. Démontrer que $3C_n^4 = C_{C_n^2}^2 - nC_{n-1}^2$

7°. Démontrer que $\prod_{k=1}^{n} C_n^k = \dfrac{n!^n}{(1! \times 2! \times ... \times n!)^2}$

XIII Propriété des arrangements.

Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} A_n^k$ pour $n \geq 0$. On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.

1°. Démontrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e$ puis démontrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{n \times n!}$

2°. Démontrer que $0 < n!e - A_n < \dfrac{1}{n}$ et en déduire que $A_n = [n!e]$

XIV Résoudre dans $\mathbb{N}$.

1°. $C_n^2 + C_n^3 = 4$ 2°. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$ 3°. $7C_n^2 = 2C_{n+10}^2$ 4°. $C_{n+5}^3 = 3C_{n+3}^2$ 5°. $A_{2n}^2 - 25 = A_n^2$

XV

1°. Soit $P(x) = (1+x)^n$. Calculer $P'(x)$ puis $P''(x)$.

2°. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$

3°. En considérant $\dfrac{1-(1-x)^n}{x}$ pour $x \neq 0$, démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

XVI

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\sigma_n = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + ... + n(n+1)(n+2)$

1°. Exprimer σ_n en fonction des sommes S_p $(p = 1, 2, 3)$ des puissances p-ièmes des n premiers entiers. En déduire σ_n.
2°. Démontrer que pour tout couple (m, k) d'entiers naturels tels que $k \leq m$, on a

$$C_{m+1}^{k+1} = C_k^k + C_{k+1}^k + ... + C_m^k$$

En déduire σ_n.
3°. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 4 s'annulant en 0 et tel que pour tout réel x, $P(x) - P(x-1) = x(x+1)(x+2)$. En déduire σ_n.

XVII

Soit $S_r = 1^r + 2^r + ... + n^r$ pour $r \in \mathbb{N}$

1°. Démontrer que $\sum_{k=0}^{r} C_{r+1}^k S_k = (n+1)^{r+1} - 1$

2°. En déduire l'expression de S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.

XVIII

Démontrer que $C_{a+b}^n = \sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$ puis en déduire $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k \left(C_n^k\right)^2$

XIX

Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$
Calculer ces sommes en posant $U_n(x) = S_n(x) + iT_n(x)$

XX Linéariser les expressions suivantes.

1°. $\cos^4 x$ 2°. $\cos^6 x \sin^2 x$ 3°. $\cos x \sin^5 x$

XXI Déterminants.

Calculer le déterminant de la matrice carrée $n \times n$ donnée par $M_n(k) = (C_{k+j}^i)_{i,j=0,..,n-1}$

XXII Portions de cercle.

On considère n points distincts sur un cercle et l'on trace tous les segments joignant deux de ces points. On suppose que trois segments ne sont jamais concourants. On s'intéresse au nombre u_n de régions ainsi définies dans le cercle.

1°. Faire un dessin et calculer u_2, u_3, u_4 et u_5. Quelle sera, d'après vous, la valeur de u_6 ?
2°. En faisant soigneusement le dessin, trouver u_6.
3°. Calculer u_n pour tout entier n.

XXIII Formule du crible.

1°. Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des ensembles finis. Démontrer que

$$\mathrm{Card}(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mathrm{Card}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_k})$$

2°. Dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ écrire et reconnaitre cette formule.

XXIV

1°. De combien de manière peut-on ranger p objets identiques dans n boites ?
2°. Quel est le nombre de solutions de l'équation $x_1 + ... + x_n = p$ avec $x_1, ..., x_n$ et $p \in \mathbb{N}$.

XXV Dérangements et théorème des chapeaux.

Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation est totalement désordonnée si elle ne possède pas de point fixe (on dit aussi un dérangement) : après permutation, aucun élément n'est resté à sa place.
Soit D_n le nombre de ces permutations.

1°. Combien existe-t-il de permutations circulaires sur cet ensemble ?
2°. Montrer que pour $n \geq 3$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$
3°. En déduire que $D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$
4°. Retrouver ce résultat à l'aide de la formule du crible.
5°. En déduire que $D_n \sim n!/e$ lorsque n tend vers $+\infty$
6°. n personnes posent leur chapeau en entrant dans une salle et en reprennent un au hasard en repartant. Calculer la probabilité pour qu'aucun d'entre eux ne retrouve son chapeau, lorsque $n \to +\infty$.

XXVI Mots de Gauss.

Un n-mot de Gauss est un vecteur $(x_1, ..., x_n)$ tel que $x_i \in \{1, 2, ..., n\}$ et chaque entier de $\{1, 2, ..., n\}$ apparaît exactement deux fois dans les coordonnées (par exemple 1313 ou 234342). Montrer que le nombre de n-mots est $(2n)!/2^n$

XXVII Escalier.

De combien de façon peut-on monter un escalier de n marches en franchissant à chaque fois soit une marche, soit deux marches ?

XXVIII Principe du pigeonnier.

1° Soit E un ensemble de $n+1$ éléments. Soit $(E_1, ..., E_n)$ une partition de E.
Montrer que l'un au moins des E_i contient plus d'un élément.

2°. Soit $x \in [0,1]$. On notera $[x]$ sa partie entière et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire.
On pose $\Lambda(x) = \{\{qx\};\ q = 0, ..., N\}$. En utilisant $\Lambda(x)$, construire une partition de $[0,1[$ en N intervalles.

3°. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists\ (p,q) \in \mathbb{N} \times \{1, ..., n\} /\ \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

XXIX Polygone.

Combien un polygone convexe à n côtés possède-t-il de diagonales ?

XXX Autour de l'échiquier.

1°. La légende veut que l'inventeur du jeu d'échec ait été invité par l'empereur de Chine ou d'Inde (cela varie selon les auteurs, mais comme on n'est pas certain de l'origine des échecs cela importe peu...). L'empereur demande à l'inventeur ce qu'il souhaite pour le féliciter de son invention et celui-ci demande du riz : 1 grain sur la 1ère case, 2 sur la seconde, et le double à chaque nouvelle case.
Calculer le nombre total de grains de riz que demande l'inventeur. La production mondiale de riz s'élevait en 2006 à un peu moins de 700 millions de tonnes. Sachant que 1000 grains de riz pèsent environ 15 grammes, calculer le poids total des grains sur l'échiquier et conclure.
2°. De combien de façons peut-on disposer 8 tours sur un échiquier de 64 cases de telle sorte qu'aucune d'elles ne soit menacée par les autres ?
3°. Même question pour deux tours.
4°. Généraliser pour k tours où $1 \leq k \leq 8$

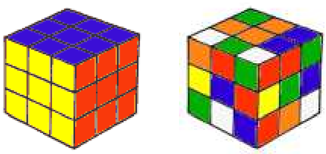
XXXI Cardinal d'un ensemble.

Soit E un ensemble à n éléments.

1°. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties distinctes de E telles que $A \cap B = \emptyset$?
2°. Quel est le nombre de couples vérifiant $A \subset B$?
3°. Généraliser à p parties $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_p$?

XXXII Analyse combinatoire du Rubik's cube.

Le Rubik's cube est un cube dont chaque face est formée de 9 petits cubes initialement de même couleur. Chaque face peut effectuer une rotation autour du cube centrale. On souhaite calculer le nombre total de configurations possibles de ce cube (photo du site "math.cornell.edu").



1°. Calculer le nombre de positions possibles des cubes se trouvant à chaque sommet, en tenant compte des orientations possibles de ces cubes.
2°. Calculer le nombre de positions possibles des cubes se trouvant au milieu des arêtes, en tenant compte également des orientations possibles.
3°. Evaluer les contraintes sur l'orientation des cubes et en déduire le nombre total de configurations possibles.

XXXIII Mécanique statistique.

On considère un ensemble de n particules en mouvement. L'état d'une particule est représenté par le couple $(m, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ où m est sa position dans l'espace et v sa vitesse. L'espace $G = \mathbb{R}^6$ s'appelle alors l'espace des phases. Soit G_i, pour $i = 1, ..., n$, une partition de G et soit G_{ij}, pour $j = 1, ..., g_i$, une partition de G_i. On pose $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$.

On note également $E_n \subset G$ l'ensemble des phases des n particules et $r_{ij} = \mathrm{card}(E_n \cap G_{ij})$. On note enfin $r_i = \mathrm{card}(E_n \cap G_i)$

1°. Le principe d'exclusion de Pauli stipule que deux particules ne peuvent pas avoir des phases appartenant au même G_{ij}.
Quel est le nombre T_1 de g-uplets r_{ij} possibles ? Quel est le nombre K_1 de g-uplets r_{ij} possibles en supposant connus les r_i ?
2°. On n'applique plus le principe de Pauli. Reprendre la question précédente pour calculer T_2 et K_2.

3°. On suppose que l'on peut discerner des phases arbitrairement voisines. Dans ces conditions, les nombres g_i et g peuvent devenir arbitrairement grands. Montrer que, pour n fixé et g tendant vers l'infini, on a $T_1 \sim T_2 \sim g^n/n!$.

4°. Montrer que pour n et r_i fixés et pour g_i tendant vers l'infini, on a

$$K_1 \sim K_2 \sim \prod_{i=1}^{n} \frac{g_i^{r_i}}{r_i!}$$

XXXIV QCM de concours.

1996

1°. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{20}^{2k} = C_{20}^0 - C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... - C_{20}^{18} + C_{20}^{20} = -1024$

2°. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on a $n(x+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k-1}$

3°. Pour tout entier naturel n, on a $n(1+i)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k i^{k-1}$

4°. $-2C_{13}^2 + 4C_{13}^4 - 6C_{13}^6 + 8C_{13}^8 - 10C_{13}^{10} + 12C_{13}^{12} = 0$

5°. Pour tous les entiers naturels n et p, on a $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$

6°. Pour tous les entiers naturels n et p, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

7°. Pour tout entier naturel k, on a $k^2 = 3C_k^2 + C_k^1$

8°. Pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2$

9°. Pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = 2C_{n+1}^3$

2000

Soient n et p deux entier naturels non nuls.
On dispose de n jetons identiques, alignés, entre lesquels on va disposer des séparateurs afin de les regrouper en tas numérotés de 1 à p, chaque tas comportant au moins un jeton.
On notera k_p le nombre de jetons dans le pième tas. Dans le tas i, on peut avoir $1 \leq k_i \leq n$ mais
$k_1 + ... + k_p = n$
On note $T(n,p)$ le nombre total de telles répartions en tas. Ici, l'ordre des tas compte.

1°. $T(n,2) = n-1$
2°. Il faut $n-1$ séparateurs pour délimiter p tas.
3°. Il y a n emplacements possibles pour chaque séparateur.
4°. $T(n,p) = C_n^{p-1}$
5°. $T(n,p) = T(n-1,p) + T(n-1,p-1)$

On dispose dans cette question de n jetons identiques que l'on veut maintenant ranger dans p boites numérotées de 1 à p. On note $R(n,p)$ le nombre total de tels rangements.

1°. Le nombre s de décompositions vérifiant $k_p = k$ est $R(n-k,p)$

2°. $R(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} R(n-k,p-1)$

3°. Pour un rangement de n pions dans p boites, en ajoutant un jeton à chaque boite, on obtient une répartition de $n+p$ jetons dans p boites non vides.

4°. $R(n,p) = T(n+p,p)$

5°. $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + C_7^4 = C_8^5$

1997

On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathcal{P}$ de 10 points distincts situés sur ce cercle et numérotés de 1 à 10.
Pour chaque paire de points distincts $\{i,j\}$ de $\mathcal{P}$, on considère la droite $D_{i,j}$ passant par ces deux points.
On suppose que les points sont répartis sur $\mathcal{C}$ de telle sorte que deux droites quelconques $D_{i,j}$ et $D_{u,v}$ ne sont jamais parallèles, et que, pour tous les choix possibles de quatre points distincts (i,j,u,v), les points d'intersections $D_{i,j} \cap D_{u,v}$ sont tous distincts.

Pour deux droites distinctes définies par 4 points distincts de $\mathcal{P}$, on peut avoir un point d'intersection situé à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

1°. Il y a exactement 90 droites $D_{i,j}$ distinctes (avec $i \neq j$)
2°. Il y a exactement 210 quadruplets (i,j,u,v) formés de quatre points tels que $i < j < u < v$
3°. A chaque quadruplet (i,j,u,v) tel que $i < j < u < v$ correspond une et une seule apire de droites se coupant à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$.
4°. En considérant toutes les paires de droites du type $\{D_{i,j}, D_{u,v}\}$, on trouve 210 points d'intersection situés strictement à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$
5°. En considérant toutes les paires de droites du type $\{D_{i,j}, D_{u,v}\}$, on trouve 210 points d'intersection situés strictement à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$