MATHEMATIQUES TD N°1 : NOMBRES COMPLEXES - Corrigé.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I

1°. $(3-4i)(1+i) = 3+3i-4i+4 = 7-i$

2°. $1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$

3°. $(1+2i)^2+(2-i)^2 = 1+4i-4+4-4i-1 = 0$

4°. $(2+i)^3 = 8+12i-6-i = 2+11i$

5°. $2(1+i) - \dfrac{1}{2+i} = 2(1+i) - \dfrac{1}{5}(2-i) = \dfrac{8+11i}{5}$

6°. $\dfrac{2+3i}{4-i} = \dfrac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \dfrac{5+14i}{17}$

7°. $\dfrac{1}{2-i} - \dfrac{3-2i}{1+2i} = \dfrac{3}{5}(1+3i)$

8°. $\dfrac{2-i}{1+i} + \dfrac{1-i}{2+i} = \dfrac{7}{10}(1-3i)$

9°. $\dfrac{5+5i}{3-4i} = \dfrac{1}{5}(-1+7i)$

10°. $3(\dfrac{1+i}{1-i})^2 - 2(\dfrac{1-i}{1+i})^3 = -3-2i$

11°. $\dfrac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \dfrac{4\sqrt{3}+i}{7}$

12°. $\dfrac{(2+i)(3+2i)}{2-i} = \dfrac{18i+1}{5}$

13°. $\dfrac{3+4i}{(1+3i)(1+i)} = \dfrac{1}{2} - i$

14°. $(1+i)(3-2i) = 5+i$

15°. $(4+2i)^2 = 12+16i$

16°. $\dfrac{3-2i}{1+i} = \dfrac{1-5i}{2}$

17°. $\dfrac{3-4i}{2i-1} = -\dfrac{11+2i}{5}$

18°. $\dfrac{(1+i)^3}{1-i} = -2$

19°. $\dfrac{1+2i}{-3+4i} = \dfrac{1-2i}{5}$

20°. $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(-1+2i)^3-(2+i)^3} = \dfrac{-87+41i}{250}$

II

Pour toutes ces équations (non linéaires), il faut poser $z = a+ib$, développer, séparer partie réelle et imaginaire pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues (souvent non linéaires) et résoudre ce système pour déterminer les valeurs possibles de a et b. Les solutions sont alors les complexes $z = a+ib$ correspondants aux valeurs de a et b trouvées.

1°. $(1+i)z + (2-3i)\bar{z} = 18-i$
On remplace z par $a+ib$ et $\bar{z}$ par $a-ib$:
$(1+i)(a+ib) + (2-3i)(a-ib) = 18-i$
$\iff (a-b+2a-3b) + i(a+b-2b-3a) = 18-i$
$\iff \begin{cases} 3a-4b = 18 \\ 2a+b = 1 \end{cases}$
La solution est $z = 2-3i$

2°. $z^2 + z\bar{z} = 0$
$\iff z(z+\bar{z}) = 0 \iff z = 0$ ou $z \in i\mathbb{R}$ donc $\mathcal{S} = i\mathbb{R}$

3°. $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$
$\iff \begin{cases} -2ab-2a+2 = 0 \\ a^2-b^2+2b-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(b+1) = 1 \\ a^2 = (b-1)^2 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} a(b+1) = 1 \\ a = b-1 \text{ ou } a = 1-b \end{cases} \Rightarrow b^2-1 = 1$ ou
$b^2-1 = -1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$ ou $b = 0 \Rightarrow a = -\pm\sqrt{2}$ ou $a = 1$
$\mathcal{S} = \{1; -1+\sqrt{2}(1+i); -1-\sqrt{2}(1+i)\}$

4°. $z^2 = \bar{z}$
$\iff \begin{cases} a^2-b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$
Si $b = 0 \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a = 0$ ou 1
Si $b \neq 0 \Rightarrow a = -1/2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}/2$
$\mathcal{S} = \{0; 1; -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$
On peut aussi passer en polaire et poser $z = re^{i\theta}$; on détermine alors les valeurs possibles de r et θ
L'équation devient $r^2e^{2i\theta} = re^{-i\theta}$

5°. $z + \bar{z} - 4 = 0$
$\iff a = 2$ donc $\mathcal{S} = \{2+ib; b \in \mathbb{R}\}$
Il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

6°. $z - \bar{z} + 5 = 0$
$\iff 2ib + 5 = 0$ ce qui est impossible
$\mathcal{S} = \emptyset$

7°. $iz + (2+3i)\bar{z} = 1$
$\iff 2(a+b) + i(4a-2b) = 1 \iff \begin{cases} 2a+2b = 1 \\ b = 2a \end{cases}$
$\mathcal{S} = \{\dfrac{1+2i}{6}\}$

8°. $z^2 = \bar{z}^6$
$\iff r^2e^{2i\theta} = r^6e^{-6i\theta} \iff \begin{cases} r^2 = r^6 \\ 2i\theta = -6i\theta + 2k\pi \end{cases}$
$\iff \begin{cases} r = 0; r = 1 \\ 4\theta = k\pi \end{cases}$ $\mathcal{S} = \{0; \pm1; \pm i; e^{\pm i\pi/4}; e^{\pm 3i\pi/4}\}$

III

1°. $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

2°. $-3i = 3e^{-i\pi/2}$

3°. $-\sqrt{17} = \sqrt{17}e^{i\pi}$

4°. $-1+i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$

5°. $(1+i)^{2000} = 2^{1000}$

6°. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{[2,\pi/3]}{[2,\pi/6]} = [1,\pi/6] = e^{i\pi/6}$

7°. $\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \dfrac{[2\sqrt{2},-\pi/6]}{[2\sqrt{2},-\pi/4]} = [1,\pi/12] = e^{i\pi/12}$

8°.
$(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{10} = \left(\dfrac{[2,\pi/3]}{[2,-\pi/3]}\right)^{10} = [1,2\pi/3]^{10} = [1,\dfrac{20\pi}{3}] = [1,\dfrac{2\pi}{3}]$

9°. $\dfrac{\sqrt{2}}{i(1+i)^3} = [1/2, 3\pi/4]$

10°. $(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^4 = [4,\pi/3]$

11°. $(\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}})^8 = \left(\dfrac{[2\sqrt{2},\pi/6]}{[2,\pi/3]}\right)^8 = [\sqrt{2},-\pi/6]^8 = 16e^{2i\pi/3}$

12°. $(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i})^4 = \left(\dfrac{[2,-\pi/3]}{[\sqrt{2},-\pi/4]}\right)^4 = [\sqrt{2},-\pi/12]^4 = [4,-\pi/3]$

13°. $-2-2i = [2\sqrt{2},-3\pi/4]$

14°. $(-1+i\sqrt{3})^5 = [2,2\pi/3]^5 = [32,10\pi/3] = [32,-2\pi/3]$

15°. $(-1-i\sqrt{3})^5 = [2,-2\pi/3]^5 = [32,-10\pi/3] = [32,2\pi/3]$

16°. $-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{[4,\pi]}{[2,\pi/3]} = [2,2\pi/3]$

17°. $\dfrac{1+i}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{[\sqrt{2},\pi/4]}{[2,5\pi/6]} = [\sqrt{2}/2;-7\pi/12]$

18°. $\dfrac{(1+\sqrt{2}+i)^{20}}{(1+\sqrt{2}-i)^{20}} = (\sqrt{2}/2(1+i))^{20} = [1,\pi/4]^{20} = [1,\pi] =$
$= -1$

IV

1°. Calculer le module et l'argument de $u = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $v = 1-i$ et $w = \dfrac{u}{v}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

On passe évidemment aux formes exponentielles. On a
$u = [\sqrt{2},\pi/6]$ $v = [\sqrt{2},-\pi/4]$
$w = \dfrac{u}{v} = [1,5\pi/12] = \cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}$ d'après les formules de Moivre. En écrivant également w sous forme algébrique, on obtient $w = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \dfrac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1+i)}{4}$
$= \dfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + \dfrac{i}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire dans les deux expressions de w, on a $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et
$\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2°. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

La méthode est la même que dans la question précédente.
$w = \dfrac{u}{v} = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = [\sqrt{2}/2,\pi/12] = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$
Par identification, $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3°. Calculer le module et l'argument de $z = u+v$ avec $u = -1+i$ et $v = -\sqrt{2}$. En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{8}$.

$z = u+v$ avec $u = -1+i = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ et
$v = -\sqrt{2} = \sqrt{2}(e^{3i\pi/4}-1) = \sqrt{2}e^{3i\pi/8}(e^{3i\pi/8}-e^{-3i\pi/8})$
$= 2i\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{8}e^{3i\pi/8} \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{8}$ et $arg(z) = \dfrac{7\pi}{8}$
Par ailleurs, $z = (-1-\sqrt{2})+i$ donc $|z|^2 = 4+2\sqrt{2}$. On peut alors calculer le sinus en identifiant les deux parties imaginaires et conclure que
$\sin\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. On en déduit aussi que $\cos\dfrac{7\pi}{8} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. A noter que cet exercice permet aussi le calcul de $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ (en faisant attention au signe de $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ qui est >0) en identifiant les deux formes du module de z. On a $\sin\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

4°. Calculer les racines carrées de $z = 1+i$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Soit $u = a+ib$ une racine carrée de z. $u^2 = z$
$\iff (a+ib)^2 = 1+i \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$
On peut également calculer $a^2+b^2 = \sqrt{2}$
$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\cos\dfrac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
(il faut faire attention à vérifier le signe de $\cos\frac{\pi}{8}$ avant d'identifier les deux formes des racines carrées. En effet, il existe deux racines carrées et il faut identifier avec la bonne ; on peut s'aider du cercle trigo pour trouver les signes des sinus et cosinus).

5°. Soit $u = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calculer u^2 et en déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

$u^2 = 2(\sqrt{3}-i) = 4e^{-i\pi/6}$ on en déduit en prenant la racine carrée, que $u = 2e^{-i\pi/12}$ ou $u = 2e^{11i\pi/12}$. En regardant le signe, on en déduit, par identification, que
$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Le sinus s'en déduit facilement.

V

1°. $P(z) = z^3-(2+2i)z^2-(13+6i)z+20+56i$

• Soit $\alpha\in\mathbb{R}/\ P(\alpha) = 0$ En remplaçant z par α et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient le système $\begin{cases} \alpha^3-2\alpha^2-13\alpha+20 = 0 \\ \alpha^2+3\alpha-28 = 0 \end{cases}$
La seconde équation se résoud facilement et l'on trouve $\Delta = 11 \Rightarrow \alpha = 4$ ou -7. Comme -7 ne satisfait pas la première équation, seule $\alpha = 4$ convient.
• $P(z) = (z-4)(z^2+bz+c) = (z-4)(z^2+2(1-i)z-(5+14i))$ après identification. La seconde équation peut alors se résoudre : $\Delta = 20+48i = 4(5+12i) = \delta^2$
Donc, en extrayant les deux racines carrées, $\delta = 6+4i \Rightarrow$ $\mathcal{S} = \{4;2+3i;-4-i\}$
• $z = 4$, $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = -4-i$. On calcule $MM_1 = |z-z_1| = \sqrt{13}$ puis $MM_2 = |z-z_2| = \sqrt{65}$ et $M_1M_2 = |z_1-z_2| = \sqrt{52}$. On voit alors que ce triangle est rectangle en utilisant le théorème de Pythagore.

2°. $P(z) = z^3-(5+3i)z^2+(6+10i)z-8i$.

Le principe est le même que dans l'exercice précédent :
• $P(a) = 0 \iff \begin{cases} \alpha^3-5\alpha^2+6\alpha = 0 \\ -3\alpha^2+10\alpha-8 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2; a = 4/3$
$P(z) = (z-2)(z^2-(3+3i)z+4i)$

Résolvons maintenant l'équation du second degré $z^2-(3+3i)z+4i = 0$
$\Delta = 2i = 2e^{i\pi/2}$ dont une racine carrée est $\delta = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$. On a donc $\mathcal{S} = \{2;1+i;2+2i\}$
• $R(1+i), S(2), T(2+2i)$, $RS = \sqrt{2}$, $ST = 2$, $RT = \sqrt{2}$ et le triangle RST est donc rectangle et isocèle.

3°. $P(z) = z^4-2z^3+az^2-2z-2$, $a\in\mathbb{R}$.

• En remplaçant z par i, $P(i) = 0 \iff a = -1$
• Comme P est à coefficients réels, si i est racine, alors $-i$ l'est aussi. On peut alors factoriser P par z^2+1 pour obtenir $P(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2)$
$\mathcal{S} = \{i; -i; 1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\}$

4°. $z^3 - (4-i)z^2 + 5(1-i)z - 6 + 6i = 0$
$\mathcal{S} = \{-2i; 1+i; 3\}$

5°. $z^3 - z^2 - 14iz^2 - 58z + 2iz + 68i = 0$
$\mathcal{S} = \{2i; 2+8i; -1+4i\}$

6°. Résoudre $z^4 - (1+i)z^3 + (2+i)z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0$
$\mathcal{S} = \{1; i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}; i\}$

7°. $P(z) = z^7 - 8z^4 + z^3 - 8$
• La vérification se fait en développant $(z^3-8)(z^4+1)$
• Les racines sont les racines quatrièmes de -1 et les racines cubiques de 8

VI

1°.
Pour calculer les racines carrées, on peut ou bien utiliser la forme exponentielle et calculer les racines à partir de cette forme, ou bien, si le complexe ne possède pas de forme exponentielle simple, utiliser l'identification $(a+ib)^2 = u$

• $z^2 = -15+8i \iff z = \pm(1+4i)$
• $z^2 = \dfrac{1+i\sqrt{15}}{2} \iff z = \pm\dfrac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{2}$
• $z^2 = 4i - 3 \iff z = \pm(1+2i)$
• $z^2 = -7-24i \iff z = \pm(3-4i)$

2°.

• $z^8 = 1 \iff z = e^{ik\pi/4}, k = 0..7$
• $z^5 + 32i = 0 \iff z = 2\exp(\dfrac{3i\pi}{10} + \dfrac{2ik\pi}{5})\ k = 0..4$
• $z^3 = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \iff z = 2^{1/6}e^{i\pi/12+2ki\pi/3}; k = 0..2$

3°.
On a facilement $u^2 = -2\sqrt{2}(1+i)$ et $u^4 = 16i$ de sorte que u est une des 4 racines 4ièmes de $16i$. Donc $u = 2e^{i\pi/8+k\pi/2}$
Comme $\mathbb{R}e(u) > 0$ et $\mathbb{I}m(u) < 0$, on en déduit que $|u| = 2$ et $arg(u) = -3\pi/8$

4°.
α est une racine 7ième de l'unité par définition, donc
$1 - \alpha^7 = 0 = (1-\alpha)(1+\alpha+...+\alpha^6)$
Puisque $\alpha \neq 1$, alors $1+\alpha+...+\alpha^6 = 0$.
Donc la somme demandée est égale à -1
On constate que $\bar{\alpha} = \alpha^6$, $\bar{\alpha}^2 = \alpha^5$ et $\bar{\alpha}^3 = \alpha^4$ Ainsi,
$S = 2\cos\dfrac{2\pi}{7} + 2\cos\dfrac{4\pi}{7} + 2\cos\dfrac{6\pi}{7}$. La somme vaut donc $-1/2$

VII

1°.
• $1 + \cos\alpha + \sin\alpha =$
$1 + 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 + 2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{i\alpha/2}$
• $1 + i\tan\alpha = 1 + i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}$
• $\dfrac{1}{1+i\tan\alpha} = \cos\alpha e^{-i\alpha}$ • $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$

2°. $\sin 2\alpha = \mathbb{I}m(e^{2i\alpha}) = \mathbb{I}m\left(\dfrac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}\right)$
$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$;
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3°. $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ et $1 = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ si $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$, l'équation précédente donne $x^2 + 2x - 1 = 0$ soit $x = -1 \pm \sqrt{2}$ comme $\tan\frac{\pi}{8} > 0$, $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$

4°.
$e^{6i\alpha} = \left(\cos^6\alpha - 15\cos^4\alpha\sin^2\alpha + 15\cos^2\alpha\sin^4\alpha - \sin^6\alpha\right)$
$+i\left(6\cos^5\alpha\sin\alpha - 20\cos^3\alpha\sin^3\alpha + 6\cos\alpha\sin^5\alpha\right)$
$\tan 6\alpha = \dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} = \dfrac{\mathbb{I}m(e^{6i\alpha})}{\mathbb{R}e(e^{6i\alpha})}$
$= \dfrac{6\cos^5\alpha\sin\alpha - 20...}{\cos^6\alpha - 15...} = \dfrac{6\tan\alpha - 20\tan^3\alpha + 6\tan^5\alpha}{1 - 15\tan^2\alpha + 15\tan^4\alpha - \tan^6\alpha}$

VIII

1°. $P(0) = P(-1) = 0$
2°. P est de degré 6 car les termes de degré 7 s'annulent lorsque l'on développe l'expression. $1 + j + j^2$ est la somme des racines cubiques de l'unité et est donc nulle.
$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = -j^{14} - j - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$
Comme P est à coefs réels, si j est racine alors son conjugué j^2 l'est aussi.
3°. Il est clair que si α est racine double de P alors $P(\alpha) = 0$ et l'on constate en dérivant P que $P'(\alpha) = 0$.
Réciproquement, si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$, alors
$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ et $P'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$. Donc
$P'(\alpha) = 0 \Rightarrow Q'(x) = (x-\alpha)R(x)$ et $P(x) = (x-\alpha)^2R(x)$
4°. $P'(x) = 7(x+1)^6 - 7x^6 \Rightarrow P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6$
$= 7j^5 - 7j^6 = 0$ et d'après la question précédente j et j^2 sont donc racines doubles. On a
$P(x) = 7x(x+1)(x-j)^2(x-j^2)^2$ dans $\mathbb{C}$ et
$P(x) = 7x(x+1)(x^2+x+1)^2$ dans $\mathbb{R}$

IX

1°. Il suffit de démontrer que $(uj)^3$ et $(uj^2)^3$ sont égaux à z.
Autre façon de répondre à la question : en utilisant un théorème de cours qui indique que pour obtenir les racines nièmes d'un complexe, il suffit de multiplier l'une d'elles par les n racines nièmes de l'unité.

$(uj)^3 = (uj^2)^3 = u^3 = z$

2°. $(1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = -11+2i$

3°. $z^3 = -11+2i \iff z = w(-11+2i)$ où $w = 1, j, j^2$

En effet, les solutions de l'équation sont les racines cubiques de $-11+2i$. Or, d'après la question précédente, on sait que $1-2i$ est l'une de ces racines cubiques. Pour avoir les deux autres, il suffit donc d'en faire le produit par j et j^2.

X

1°. $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$
car il s'agit de la somme des racines 5ièmes d'un complexe (c'est du cours). u vérifie par ailleurs la propriété $u^5 = 1$ puisque u est une racine cinquième de l'unité.

2°. Nous avons $u^2 = e^{4\pi i/5}$, $u^3 = e^{-4\pi i/5}$, et $u^4 = e^{-2\pi i/5}$

Ainsi, $\bar{u} = u^4$ et $\bar{u}^2 = u^3$.
Par ailleurs on sait que pour un complexe z, $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$ de sorte que $u + u^4 = 2\Re e(u) = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$
$\Rightarrow v = u + u^4 = 2x$

Par ailleurs,
$(u+u^4)^2 = u^2+u^3+2 \Rightarrow w = v^2-2 = 4x^2-2$

Enfin, l'équation du 1° s'écrit
$v+w+1=0 \iff 4x^2+2x-1=0$

3°. Les solutions de l'équation du second degré précédente sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
L'une des racines est positive et l'autre est négative.

Puisque $\cos\frac{2\pi}{5}>0$, nous avons $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Enfin, en utilisant la formule de duplication des cosinus, il vient alors :

$\cos\dfrac{2\pi}{5} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 1 \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}}$

XI

On considère les deux équations $E_1:\ z^5-1=0$ et
$E_2:\ z^4+z^3+z^2+z+1=0$

1°. Résoudre E_1 et en déduire les solutions de E_2.

$z^5=1 \iff z=e^{2k\pi i/5}$, $k=0,..,4$. Par ailleurs,
$1+...+z^4 = \dfrac{1-z^5}{1-z} = 0 \iff z\neq 1$ et $z^5=1$. Ainsi, les solutions de E_2 sont les $e^{2k\pi i/5}$, $k=1,...,4$

2°. Soit $P(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$. Vérifier que
$P(z) = z^2\left[(z^2+\dfrac{1}{z^2})+(z+\dfrac{1}{z})+1\right]$ si $z\neq 0$

C'est évident, il suffit de développer.

3°. On pose $u=z+\dfrac{1}{z}$. Montrer que $P(z)=z^2f(u)$ où f est un polynôme de degré 2 à déterminer.

On a $f(u)=u^2+u-1=0$

4°. Résoudre $f(u)=0$ et en déduire les solutions de E_2

$f(u)=0$ est une équation du second degré. Calculons le discriminant : $\Delta=5$ et les deux racines sont donc
$u_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
0 n'est pas racine de P de sorte que
$P(z)=0 \iff f(u)=0$. Les solutions de E_2 sont donc les z tels que $u=z+1/z$, u étant une des deux racines de f. On a $u=z+1/z \iff z^2-uz+1=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=u^2-4$
Lorsque l'on remplace u par u_1 et u_2, on obtient donc deux discriminants $\Delta_1 = -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $\Delta_2 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$. Les deux sont négatifs et il y a donc quatre racines complexes conjuguées :
$s_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} s_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$s_3\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $s_4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Il faut identifier ces solutions avec les $z_k=e^{2ik\pi/5}$. En raisonnant sur les signes des sinus et cosinus, on voit facilement que $z_1=s_1$, $z_2=s_2$, $z_3=s_3$ et $z_4=s_4$ (on aurait presque l'impression que c'est fait exprès).

5°. En comparant les solutions de E_2, calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5}$

La question précédente montre que
$s_1+s_4 = 2\Re e(z_1) = 2\cos(2\pi/5)$,
$s_2+s_3 = 2\Re e(z_3) = 2\cos(4\pi/5)$,
$s_1-s_4 = 2i\Im m(z_1) = 2i\sin(2\pi/5)$ et
$s_2-s_3 = 2i\Im m(z_2) = 2i\sin(4\pi/5)$

$\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

XII

1°. $z^2=z \iff z(z-1)=0$ et $\mathcal{S}=\{0,1\}$

2°. $z^2-z-1=0$ et $\mathcal{S}=\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$

3°. $z^2-z+1=0$ et $\mathcal{S}=\{\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$

4°. $z^2+2\sqrt{3}z+1=0$ et $\mathcal{S}=\{-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\}$

5°. $5z^2+2z+10=0$ et $\mathcal{S}=\{\dfrac{-1\pm 7i}{5}\}$

6°. $iz^2-2iz+i-2=0$
On peut constater que i est racine évidente. En ce cas, la seconde racine est $2-i$ en mettant l'équation sous la forme z^2-Sz+P où S est la somme des racines et P le produit. On peut aussi calculer $\Delta=8i=\delta^2$ avec $\delta=\pm(2+2i)$ et l'on a $\mathcal{S}=\{i;2-i\}$

7°. $z^5-2z^4-z+2=0$
$i,-i,1,-1$ sont racines évidentes. $\mathcal{S}=\{\pm1,\pm i,2\}$

8°. $z^2+2(1+i)z+4i=0$
$\Delta=8e^{-i\pi/2} \Rightarrow \delta=2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ $\mathcal{S}=\{-2;-2i\}$

9°. $1+\bar{z}+z^2=0$
Attention, l'équation n'est pas linéaire. Il faut poser $z=a+ib$ et effectuer le même type de calcul que dans le II.
$\iff \begin{cases} 1+a+a^2-b^2=0 \\ 2ab-b=0 \end{cases}$
$b(2a-1)=0 \Rightarrow b=0$ impossible
$a=1/2 \Rightarrow b=\frac{\sqrt{7}}{2}$ donc $\mathcal{S}=\{\dfrac{1}{2}(1\pm i\sqrt{7})\}$

10°. $z^4+z^2+1=0$
Il s'agit d'une équation bicarrée : on pose $x=z^2$ et l'équation devient $x^2+x+1=0$ dont les solutions sont $e^{\pm 2i\pi/3}$
Les solutions de l'équation initiale sont donc les racines carrées de ces deux complexes, ie $\mathcal{S}=\{e^{\pm 2i\pi/3};e^{\pm i\pi/3}\}$

11°. $z^2=-8+6i$
Les solutions sont les racines carrées de $-8+6i$ à calculer suivant la méthode habituelle $\mathcal{S}=\{-1\pm 3i\}$

12°. $z^2+(-3+i)z+4-3i=0$
$\Delta=-8+6i$. Il faut déterminer l'une de ses racines carrées δ sous forme algébrique en posant, comme d'habitude, $\delta=\alpha+i\beta$; on trouve $\delta=1+3i$ ou $\delta=-1-3i$ et l'on en déduit les solutions : $\mathcal{S}=\{2+i;1-2i\}$

13°. $z^2+2iz+i\sqrt{3}=0$
$\Delta=-4(1+i\sqrt{3})=8e^{-2i\pi/3}$ $\delta=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$
$\mathcal{S}=\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{i}{2}(2+\sqrt{6});-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{i}{2}(\sqrt{6}-2)\}$

14°. $z^3-z^2-z=0$
L'équation s'écrit $z(z^2-z-1)=0$ et les solutions sont donc 0 ainsi que les solutions de $z^2-z-1=0$ ie $\mathcal{S}=\{0;\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$

15°. $z^2 - 2r\cos\theta z + r^2 = 0$
$\Delta = 4r^2\cos^2\theta - 4r^2 = -4r^2\sin^2\theta \Rightarrow \delta = 2ir\sin\theta$
$\mathcal{S} = \{e^{\pm i\theta}\}$

16°. $z^6 - 2r\cos\theta z^3 + r^2 = 0$
Posons $x = z^3$, alors l'équation est la même que la précédente. Ces solutions sont donc les racines cubiques de $e^{\pm i\theta}$
$\mathcal{S} = \{e^{\pm i\theta/3+2ik\pi/3}\ ; k = 0..2\}$

XIII

On pose $P(x) = x^6 - 8\sqrt{2}x^3 + 64$ et $Q(x) = x^2 - 8\sqrt{2}x + 64$

1°. Déterminer les deux racines de $Q(x) = 0$.

Un calcul rapide donne comme racines $4\sqrt{2}(1 \pm i) = 8e^{\pm i\pi/4}$

2°. En déduire les racines de $P(x) = 0$.

On a $P(x) = Q(x^3)$ de sorte que les racines de $P(x) = 0$ sont les racines cubiques de celles de $Q(x) = 0$.
On obtient sous forme exponentielle :

$x_1 = 2e^{i\pi/12}$, $x_3 = 2e^{i(\pi/12+2\pi/3)}$, $2e^{i(\pi/12-2\pi/3)}$, $2e^{-i\pi/12}$,
$x_2 = 2e^{i(-\pi/12+2\pi/3)}$, $2e^{i(-\pi/12-2\pi/3)}$

3°. On note x_1, x_2, x_3 les racines de $P(x) = 0$ dont la partie imaginaire est positive, classés par partie réelle décroissante. Factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

$P(x) = (x - x_1)(x - \bar{x_1})(x - x_2)(x - \bar{x_2})(x - x_3)(x - \bar{x_3})$
$= (x^2 + 2\Re e(x_1)x + 4)(x^2 + 2\Re e(x_2)x + 4)(x^2 + 2\Re e(x_2)x + 4)$
$= (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})x + 4)(x^2 + 2(\sqrt{4} + \sqrt{2})x + 4)$

4°. Calculer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\cos(\dfrac{7\pi}{12})$

Par identification,
$\cos(\dfrac{\pi}{12}) = \Re e(x_1)/2 = \sqrt{\sqrt{3}+2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
$\cos(\dfrac{7\pi}{12}) = \Re e(x_2)/2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

XIV

On cherche un polynôme $P(x)$ tel que
$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(5t) = P(\cos t)$. On pose $S = (\cos t + i\sin t)^5$

1°. Déterminer $\Re e(S)$ et en déduire l'expression de $P(x)$.

On développe en utilisant la formule du binôme de Newton :
$S = \cos^5 t - 10\cos^3 t(1 - \cos^2 t) + 5\cos t(1 - \cos^2 t)^2$
Pour obtenir $P(x)$, on substitue $\cos t$ par x et l'on a
$P(x) = x^5 - 10x^3(1 - x^2) + 5x(1 - x^2)^2 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

2°. Démontrer que $P(x)$ possède 5 racines distinctes $x_0 > x_1 > ... > x_4$ dans l'intervalle $[-1, 1]$. Les calculer.

$P(x) = 0 \iff x = 0$ ou $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$
Il s'agit d'une équation bicarrée avec 4 solutions :
$\pm\dfrac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$

3°. Déterminer $t_k \in [0, \pi]$ tel que $x_k = \cos(t_k)$ pour $k = 0, ..., 4$.

$P(\cos t) = 0 \iff \cos(5t) = 0$ par construction de P. Ainsi, $t_k = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5}$

4°. Calculer $\cos(\pi/10)$ et $\cos(7\pi/10)$

$\cos\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ $\cos\dfrac{7\pi}{10} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$x_0 = \cos(t_0) = \cos(\pi/10)$, $x_1 = \cos(t_1) = \cos(3\pi/10)$,
$x_2 = \cos(t_2) = \cos(\pi/2) = 0$, $x_3 = \cos(t_3) = \cos(7\pi/10)$ et
$x_4 = \cos(t_4) = \cos(9\pi/10)$

XV

On considère le polynôme $P(x) = x^6 + 1$

1°. Déterminer les racines sixièmes de -1 et les regrouper par conjugués.

$x^6 = -1 \iff x = e^{i(\pi/6+2k\pi/6)}$, $k = 0, ..., 5$. Notons x_k les différentes valeurs obtenues. Nous avons :
$x_0 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \bar{x}_5$, $x_1 = i = \bar{x}_4$ et $x_2 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2} = \bar{x}_3$

2°. En déduire la factorisation de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$

$P(x) = (x - x_0)(x - \bar{x_0})(x - x_1)(x - \bar{x_1})(x - x_2)(x - \bar{x_2})$
$= (x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$

XVI

Soient $P(x) = x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$ et $Q(x) = P(x^4)$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$
On note également $S = \sin(\theta/4)$ et $C = \cos(\theta/4)$

1°. Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines de P en fonction de θ et en déduire celles de Q.

$P(x) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$ et $Q(x) = P(x^2)$
$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = (2i\sin\theta)^2$
Les racines sont donc $e^{\pm i\theta}$. Par suite, les racines de Q sont les racines quatrièmes de $e^{\pm i\theta}$ ie les $e^{\pm i(\theta/4+k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$

2°. Tracer ces racines dans le plan complexe. Conclusion ?

Les racines quatrièmes de $e^{i\theta}$ forment un carré inclus dans le cercle trigo dont un sommet est $e^{i\theta/4}$.
Les racines quatrièmes de $e^{-i\theta}$ forment un carré inclus dans le cercle trigo dont un sommet est $e^{-i\theta/4}$.
L'ensemble des racines forment donc un octogone.

3°. Déterminer θ pour que les racines de Q forment un octogone régulier dont vous calculerez l'aire.

L'octogone précédent ne sera régulier que si $\theta_0/4 = (-\theta_0/4 + \pi/2 - \theta_0/4)/2$ ie si $\theta_0 = \pi/2$ car alors l'affixe de $e^{i\theta/4}$ est alors au milieu de l'arc formé par deux autres racines.

Commençons par calculer la longueur d'une arête du polygone : $l = |e^{i\pi/4} - 1| = |e^{i\pi/8}(e^{i\pi/8} - e^{-i\pi/8})| = 2\sin\dfrac{\pi}{8}$
Mais de $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ d'où $l = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. L'aire de l'octogone vaut 8 fois l'aire d'un secteur qui a la forme d'un triangle isocèle dont 2 côtés sont de longueur 1 et le troisième de longueur l ;
$\mathcal{A} = 8 \times \dfrac{1}{2}l\sqrt{1 - l^2/4} = 2\sqrt{2}$

XVII

On considère l'équation E : $z^{2n} - 1 = 0$ et l'on note $S(z) = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2n-2}$

1°. Calculer $S(z)$.

Cet exercice généralise les précédents. Le corrigé arrive bientôt.

2°. Résoudre E ; en déduire les solutions de $S(z)=0$
3°. Soient $k\in\{1,2,...,n-1\}$ et $k'=2n-k$. Quel est l'ensemble décrit par k' ?
On pose $z_k=\exp(ik\pi/n)$; comparer z_k et $z_{k'}$ et en déduire que $P(z)=(z-z_k)(z-z_{k'})\in\mathbb{R}[z]$
Exprimer ce polynôme en fonction de z,k,n
4°. Montrer que

$$S(z)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos(\frac{k\pi}{n})+1\right)$$

5°. En considérant $S(i)$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k\pi}{n})$

6°. Calculer $S(1)$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k}{2n})=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

XVIII

1°. $(x+\alpha)^3+a(x+\alpha)^2+b(x+\alpha)+c=0$
$x^3+3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3+ax^2+2a\alpha x+a\alpha^2+bx+b\alpha+c=0$
Pas de terme en x^2 ssi $3\alpha+a=0\iff\alpha=-a/3$

2°. Résoudre $E\iff$ résoudre E^* en changeant X en $x+\alpha$.
En outre, dans $x^3+px+q=0$ on a $\left\{\begin{array}{l}p=3\alpha^2+2a\alpha+b\\ q=\alpha^3+a\alpha^2+c\end{array}\right.$

3°. La fonction de changement de variables est bijective et u et v sont les deux solutions de $x^2-sx-p/3=0$

4°. $x^3+px+q=(u+v)^3+p(u+v)+q$
$=u^3+v^3+3u^2v+3vu^2-3uv(u+v)+q=u^3+v^3+q=0$
$\left\{\begin{array}{l}u^3+v^3=q\\ uv\in\mathbb{R}\\ (uv)^3=-p^3/27\end{array}\right.$
Réciproquement, ces trois conditions montrent que x est solution de $x^3+px+q=0$
u^3 et v^3 sont solutions de $x^2+qx-p^3/27=0$ on a $S=u^3+v^3$ et $P=u^3v^3\Rightarrow u$ et v sont les racines cubiques donc les solutions.

5°.
• $E_4:x^3+3x^2+15x+78=0$
On a $\alpha=-1,p=12,q=80\Rightarrow x^3+12x+80=0$
Posons $x=u+v$ et $uv=-4$, alors u et v sont solutions de $x^2+80x-64=0$; $\Delta=(80)^2+4^4=4^4\times26$ et les valeurs de x possibles sont $\dfrac{-80\pm16\sqrt{26}}{2}=-40\pm8\sqrt{26}$
Les solutions de E_4 sont les racines cubiques de ces deux nombres dans $\mathbb{C}$
• $E_1:x^3-15x-126=0$
On a $p=-15,q=-126$. u^3 et v^3 sont solutions de $x^2-12x+125=0$; ainsi $x=1$ ou $x=125$ et donc $u^3=1$ et $v^3=125\Rightarrow u=1,v=5$ $\mathcal{S}=\{6;-3+2i\sqrt{3};-3-2i\sqrt{3}\}$
• idem pour E_3 et E_2

XIX

1°. Montrer que toute équation de degré 4 de la forme $X^4+AX^3+BX^2+CX+D=0$ se ramène à une équation du type $x^4+ax^2+bx+c=0$ en posant $X=x+\alpha$

Le corrigé arrive bientôt.

2°. Montrer que cette dernière équation peut se mettre sous la forme $S(x)^2+T(x)=0$ où $S(x)$ et $T(x)$ sont des polynômes de degré 2 avec $S(x)=x^2+\beta$. On pourra poser $T(x)=u(x+\gamma)^2$ pourvu que β soit solution de $\phi(\beta)=0$ équation de degré 3 à expliciter.

3°. En déduire que, si l'on trouve les solutions de $\phi(\beta)=0$, on peut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation initiale.

4°. Résoudre $x^4+3x^2+6x+10=0$
En déduire les trois factorisations en produit de deux trinômes et la résolution dans $\mathbb{C}$. Représenter les solutions dans le plan complexe. Quelle est leur somme ? Leur produit ?

5°. Résoudre $x^4-4x^3+9x^2-4x+8=0$. Déterminer les modules et arguments des solutions, ainsi que leur somme et leur produit. Factoriser le polynôme correspondant dans $\mathbb{R}$

XX

On note $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\in\mathbb{C}/\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.
$\forall u=a+ib\in\mathbb{Z}[i],\ N(u)=a^2+b^2\in\mathbb{Z}$ est la norme de u.

1°. Quel est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?

Il s'agit des points du plan complexe à coordonnées entières : ils forment un réseau régulier du plan

2°. Démontrer que $\forall u,v\in\mathbb{Z}[i],\ N(uv)=N(u)N(v)$

Il suffit de faire le calcul en posant $u=a+ib$ et $v=a'+ib'$.
Alors $uv=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$, donc
$N(uv)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2$.
De même $N(u)N(v)=(a^2+b^2)\times(a'^2+b'^2)$. On développe et les deux expressions coïncident.

3°. Un entier de Gauss u est inversible s'il existe un autre entier de Gauss b tel que $uv=1$.
Démontrer que u est inversible ssi $N(u)=1$. En déduire l'ensemble $\mathbb{Z}[i]^\times$ des éléments inversibles.

Si u est inversible, alors il existe $v\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $uv=1$. En ce cas, $N(uv)=N(1)=1=N(u)\times N(v)$. Mais la norme N est obligatoirement un entier, donc on doit avoir $N(u)=\pm1$ qui sont les seuls entiers relatifs inversibles pour $\times$. Seuls les complexes $1,-1,i,-i$ ont une norme égale à 1, ce sont donc les seuls entiers de Gauss inversibles.

4°. Nous allons démontrer l'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$. Il s'agit de démontrer que $\forall u,v\in\mathbb{Z}[i],\exists\,q,r\in\mathbb{Z}[i]/\ u=vq+r$ et $N(r)<N(v)$
Pour cela, étudier le complexe u/v et démontrer que $\forall z\in\mathbb{C}$, il existe $v\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z-v)<1/2$ (faire un dessin). Conclure.

Partons des deux entiers $u=a+ib$ et $v=a'+ib'$ et effectuons leur quotient, dans $\mathbb{C}$. Il sera de la forme $x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{Q}$ car le quotient de deux entiers est un rationnel. Maintenant tout complexe se trouve à une distance inférieure à $1/\sqrt{2}$ d'un entier de Gauss : si ces deux coordonnées sont non entières, il est dans un unique carré dont les sommets sont formés par des entiers de Gauss (faire un dessin !!). Le plus proche des 4 sommets est à une distance d'au plus $1/\sqrt{2}$ qui est le milieu de la diagonale du carré. Si l'une des coordonnées est entière, le complexe se trouve sur un segment de longueur 1 et d'extrémités formées par 2 entiers de Gauss. On a donc le résultat suivant : $\forall z\in\mathbb{C},\exists\,v\in\mathbb{Z}[i]/N(z-v)<1/2$ (la norme est égale à la distance au carré entre 2 deux complexes).

XXI

1°. L'identité de Diophante (III ième siècle avJC) : Démontrer que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Conclure quant à l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés.
Sachant que $13=9+4$ et $29=25+4$, décomposer 377 en somme de deux carrés, et ce de deux façons différentes.

Soit $z=a+ib$ et $z'=c+id$. $|z|^2=a^2+b^2$ et $|z'^2|=c^2+d^2$. Par ailleurs, $zz'=(ac+bd)+i(ad-bc)$. La relation cherchée est alors équivalente à la relation $|zz'|^2=|z|^2\times|z'|^2$.
$377=13\times 29=(9+4)(25+4)=(3^2+2^2)(5^2+2^2)$
$=(15+4)^2+(6-10)^2=19^2+4^2$ Par permutation, on a également $377=(2^3+3^2)(5^2+2^2)=16^2+11^2$
Conclusion : il y a toujours 2 décompositions possibles.

2°. L'identité de Brahmagupta (628 ap JC) : Démontrer que $(a^2+ub^2)(c^2+ud^2)=(ac+bud)^2+(ad-ubc)^2$
(On considèrera $v=\sqrt{u}$)

C'est la même chose en posant $z=a+ibv$ et $z'=c+idv$ avec $v^2=u$

3°. L'identité d'Euler : Démontrer que
$|u|^2+|v|^2)(|u'|^2+|v'|^2)=|uu'-vv'|^2+|u\bar{v'}+v\bar{u'}|^2$
$\forall u,v,u',v'\in\mathbb{C}$. Qu'en est-il de la somme de quatre carrés ?

$|uu'-vv'|^2=(uu'-vv')(\bar{u}\bar{u'}-\bar{v}\bar{v'})=|uu'|^2+|vv'|^2-...$ etc.

4°. Démontrer que
$\sqrt{2}|a+b+c|\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$
Donner une interprétation en géométrie dans l'espace.

Le corrigé arrive...

XXII

Pour tout complexe $z=a+ib=re^{i\theta}$ on pose $e^z=e^re^{i\theta}$ et $\log z=\log(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$

1°. Démontrer que e^z a les mêmes propriétés que la fonction réelle e^x et que ces fonctions coïncident si $z\in\mathbb{R}$.

On voit facilement que $e^{zz'}=e^ze^{z'}$ par identification sur les formes exponentielles, et que $e^{-z}=(e^z)^{-1}$. De même si $z=x$ est un nombre réel, $e^z=e^x$; même conclusion pour un imaginaire pur.

2°. Démontrer que e^z est périodique de période $2\pi i$.

$e^{2\pi i+z}=e^{2\pi i}e^z=e^z$

3°. Calculer $|e^z|$ et $arg(e^z)$.

$|e^z|=|e^r|\times|e^{i\theta}|=e^{\Re e(z)}$ et $arg(e^z)=\theta=\Im m(z)$

4°. On admet que $\forall x\in\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{zx}=0\iff\lim\limits_{x\to+\infty}|e^{zx}|=0$
Ceci nous permet de définir la notion de limite dans $\mathbb{C}$. A quelle condition sur z a-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{zx}=0$?

$$\lim_{x\to+\infty}e^{zx}=\lim_{x\to+\infty}|e^{zx}|=\lim_{x\to+\infty}e^{\Re e(z)\times x}=0\iff\Re e(z)<0$$

5°. Déterminer le domaine de définition du logarithme complexe. Calculer $\log i$.

Par construction, $\ln z$ n'existe pas si $z\in\mathbb{R}_-$ car alors $re^{i\theta}=-r$. Le domaine de définition du logarithme complexe est donc l'ensemble du plan complexe auquel a été retiré la demi-droite $(y'O]$.

$\log i=i\dfrac{\pi}{2}$ par construction.

6°. Calculer $|\log z|$ et $arg(\log z)$. Calculer $\log(zz')$ et $\log(z/z')$. Déterminer le module et l'argument de $\log(1-i)$

$|\log z|=\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2}=\sqrt{(\ln\Re e(z))^2+\Im m(z)^2}$ et $arg(\log z)=\theta=\Im m(z)$

$\log(zz')=\log z+\log z'$ et $\log(z/z')=\log z-\log z'$.
$|\log(1-i)|=|\log(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})|=\sqrt{(\ln 2)^2/4+\pi^2/16}$ et $arg(\log(1-i))=-\dfrac{\pi}{4}$

XXIII

Pour tout entier n, on pose $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$,
$V_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ et $D_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}e^{ikx}$

1°. En posant $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{ikx}$, démontrer que

$$U_n=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}\text{ et }V_n=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}$$

Posons $z=e^{i\theta}$ et $S_n=1+z+z^2+...+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$
$z\neq 1$ car $\theta\neq 2k\pi$

$$S_n=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\frac{-2i\sin((n+1)\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)}$$
$$=e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

$$U_n=\Re e(S_n)=\frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}$$
$$V_n=\Im m(S_n)=\frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}$$

Si $\theta=2k\pi$, $S_n=1+1+...+1=n+1$, $U_n=n+1$, $V_n=0$

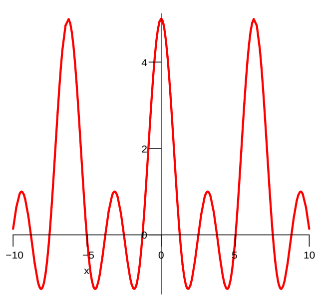
2°. Démontrer que $D_n(x)=1+2\sum\limits_{k=0}^{n}\cos kx$

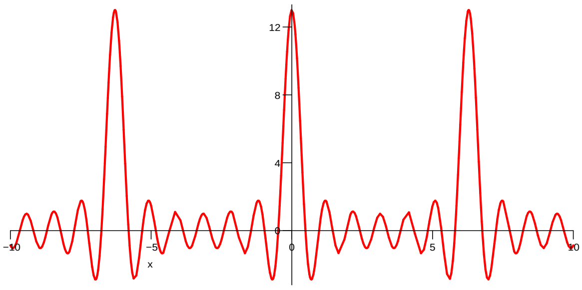
$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}z^k$$
$=e^{-inx}+e^{-i(n-1)x}+...+e^{-ix}+1+e^{ix}+...+e^{inx}$

On regroupe alors les exponentielles avec leur conjuguée :
$D_n(x)=1+2\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$

3°. Démontrer que $D_n(x)$ est une fonction réelle, paire et 2π-périodique. A l'aide d'un ordinateur, tracer les courbes représentatives de $D_n(x)$ pour différentes valeurs de n.

L'expression précédente montre évidemment que $D_n(x)$ est réelle, 2π périodique et paire. Voici D_2 et D_6 :





4°. Démontrer que

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

si $x \neq 2k\pi$. Que vaut $D_n(x)$ si $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$?

En posant $z = e^{ix}$ et $\bar{z} = e^{-ix} = 1/z$, on a $z\bar{z} = 1$ et
$D_n(x) = z^{-n} + ... + z^{-1} + 1 + z + ... + z^n$
$= \bar{z}\dfrac{1-\bar{z}^n}{1-\bar{z}} + \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1}{1-z}\left(\bar{z}^n - z^{n+1}\right)$
$\Rightarrow D_n(x) = \dfrac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{-inx}\dfrac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$
$= e^{-inx}\dfrac{e^{i(2n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\dfrac{e^{-i(2n+1)x/2} - e^{i(2n+1)x/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}$
$= \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$

Par ailleurs, si $x = 2k\pi$, $D_n(x) = 1 + 1 + ... + 1 = 2n+1$

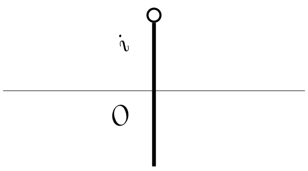
5°. Déterminer les valeurs de x qui annulent $D_n(x)$.

$D_n(x) = 0 \iff (2n+1)x/2 = \pi/2 + k\pi \iff x = \dfrac{2k+2}{2n+1}\pi$, $k = 0, ..., 2n-1$

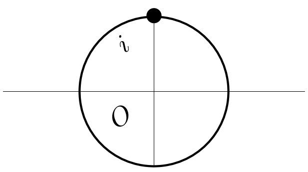
XXIV

1°. $\omega = \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)} = \dfrac{(a^2+b^2-1)+2ai}{a^2+(b-1)^2}$

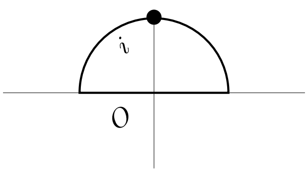
• $\omega \in \mathbb{R} \iff \mathbb{I}m(\omega) = 0 \iff a = 0, b \neq 1$
$\iff M \in (Oy)/I(0,1)$



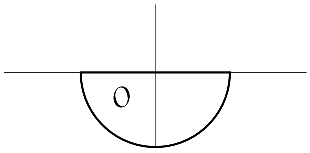
• $\omega \in i\mathbb{R} \iff \mathbb{R}e(\omega) = 0 \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ a^2+(b-1)^2 \neq 0 \end{cases}$
$\iff M \in \mathcal{C}(0,1)/I(0,1)$



• $arg(\omega) = \pi/2 \iff \mathbb{R}e(\omega) = 0$ et
$\mathbb{I}m(\omega) > 0 \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ a > 0; (a,b) \neq (0,1) \end{cases} \iff M \in \mathcal{C}^+/I$



• $arg(\omega) = -\pi/2 \iff \mathbb{R}e(\omega) = 0$ et
$\mathbb{I}m(\omega) < 0 \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ a < 0 \end{cases} \iff M \in \mathcal{C}^-$ (4)



2°. $(z-1)(\bar{z}-i) = [(x-1)+iy][x-i(y+1)]$
$= (x^2+y^2-x+y) + i(y-x+1)$
$(z-1)(\bar{z}-i) \in \mathbb{R} \iff y-x+1 = 0$
$(z-1)(\bar{z}-i) \in i\mathbb{R} \iff x^2+y^2-x+y = 0$
$\iff (x-1/2)^2 + (y+1/2)^2 = 1/2$

3°. $|z-2+3i| = 2$ est le cercle de rayon 2 et de centre $(2,-3)$
$|z-i| = |z+1-i| \iff |x+iy-i|^2 = |x+iy+1-i|^2$
$\iff x = -1/2 \iff M \in \Delta : x = -1/2$

XXV

1°. Cf. polycopié de cours.

2°. $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$

$x+iy = \dfrac{x'-iy'}{x'^2+y'^2} \iff \begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = -\frac{y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}$

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont on cherche l'image. $\mathcal{D} : ax+by+c = 0$
$c \neq 0 \Rightarrow a\dfrac{x'}{x'^2+y'^2} - b\dfrac{y'}{x'^2+y'^2} + c = 0$
$\Rightarrow (x' + \dfrac{a}{2c})^2 + (y' - \dfrac{b}{2c})^2 = \dfrac{1}{4c^2}(a^2+b^2)$ c'est l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-a/2c, b/2c)$ et rayon $R\dfrac{1}{2|c|}\sqrt{a^2+b^2}$
auquel on doit retirer le point $O(0,0)$

3°. Si la droite passe par O son équation est $ax+by = 0$ et l'images est $ax'+by' = 0$ droite symétrique par rapport à (Ox)

4°. $\mathcal{D} : y = x+1$ est transformée en $\mathcal{C}(I,R)$ avec $I(-1/2, 1/2)$ et $R = \sqrt{2}/2$. $\Delta : y = 2x$ en $\Delta' : y = -2x$

XXVI

1°. $Z = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \times \dfrac{\omega_1+i\omega}{\omega_2+i\omega} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \times \dfrac{(\omega_1\omega_2+\omega)^2 + i\omega(\omega_2-\omega_1)}{\omega_2^2+\omega^2}$

$\boxed{X = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \times \dfrac{(\omega_1\omega_2+\omega)^2}{\omega_2^2+\omega^2}}$ $\boxed{Y = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \times \dfrac{\omega(\omega_2-\omega_1)}{\omega_2^2+\omega^2}}$

$|Z(\omega)| = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\left|\dfrac{\omega_1+i\omega}{\omega_2+i\omega}\right| = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2+\omega^2}{\omega_2^2+\omega^2}}$

2°. $\tan\phi = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{\omega(\omega_2-\omega_1)}{(\omega_1\omega_2+\omega)^2}$

3°. $\lim\limits_{\omega\to+\infty} |Z(\omega)| = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ et $\lim\limits_{\omega\to 0} |Z(\omega)| = 1$

$\lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{Y}{X} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\omega\to+\infty} arctan\dfrac{Y}{X} = 0$
par continuité de la fonction arctan.

Enfin, $\lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{Y}{X} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\omega\to 0} \phi(\omega) = 0$

XXVII

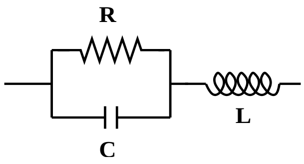
On considère le montage suivant, alimenté par un courant alternatif de pulsation ω.

1°. Calculer l'impédance complexe $Z(\omega)$ du circuit.

En appliquant le cours, on a

$$Z = \frac{R}{1+(RC\omega)^2} + i\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2}\right)$$

2°. Déterminer $|Z(\omega)|$ et $arg(Z(\omega))$. Application numérique : $R = 10\ \Omega$, $L\omega = \frac{1}{C\omega} = 200\ \Omega$.



$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\sqrt{R^2 + (L\omega(1+(RC\omega)^2) - (R^2C\omega))^2}$$

XXVIII

1°. $H(i\omega) = \dfrac{1}{1+i\frac{\omega^2-4}{2\omega}} \Rightarrow f(\omega) = \dfrac{\omega^2-4}{2\omega}$

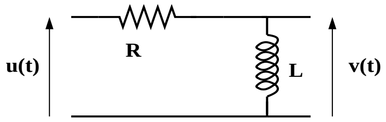
2°. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$ $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$
$f'(x) > 0$ et f est donc croissante sur $]0, +\infty[$

3°. $z = 1 + if(\omega)$ a une partie réelle constante ; c'est la droite $\Delta : x = 1$

4°. $H(i\omega) = 1/z$ est composée de l'inversion complexe de centre O et rapport 1 et de la symétrie d'axe (Ox) M parcourt donc le cercle de diamètre $[OH]$ privé de O.

XXIX

On considère la fonction de transfert $H(\omega)$ de la cellule RL ci-dessous :



1°. Démontrer que $H(\omega) = \dfrac{iL\omega}{R+iL\omega}$

$$H(\omega) = \frac{V(t)}{U(t)} = \frac{iL\omega}{R+iL\omega}$$

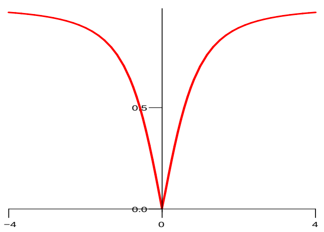
2°. On pose $\omega_0 = R/L$. Exprimer $H(\omega)$ en fonction de ω et ω_0.

$$H(\omega) = \frac{i\omega/\omega_0}{1+i\omega/\omega_0}$$

3°. Calculer et étudier $G(\omega) = |H(\omega)|$ et $\phi(\omega) = Arg(H(\omega))\cdot$

$$G(\omega) = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

La courbe représentative ci-dessous donne la forme de la courbe :



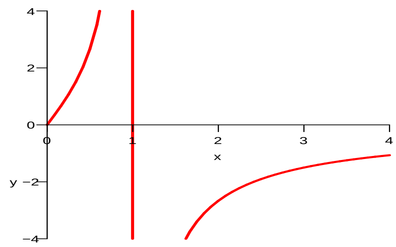
Par ailleurs, on a immédiatement $\phi(\omega) = -\arctan(\omega_0/\omega)$

XXX

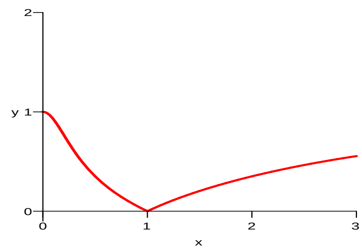
1°. $Z_1 = \dfrac{R}{2}(1 - \dfrac{i}{x})$ et $\dfrac{1}{T} = 1 + \dfrac{Z_2}{Z_1} = 1 + \dfrac{4ix}{1-x^2}$

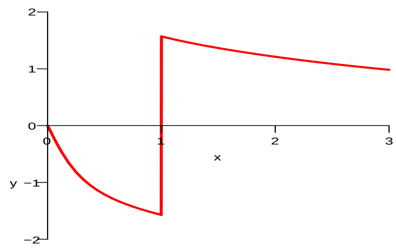
2°. $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)+8x^2}{(1-x^2)^2}$

$f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $f(x)$ parcourt $\mathbb{R}$ tout entier. $if(x)$ parcourt donc (Oy) tout entier. $1 + if(x)$ parcourt la droite $\Delta : x = 1$. M d'affixe T parcourt $\mathcal{C}$ de diamètre $[OH]$ avec $H(1,0)$, O et H étant exclus.



3°. $|T(x)|^2 = \dfrac{1}{1+f(x)^2} \Rightarrow |T(x)| = (1+f(x)^2)^{-1/2}$
$|T(x)|' = -f(x)f'(x)(1+f(x)^2)^{-3/2}$ ainsi $|T(x)|$ est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$
$\phi(x) = arg(T(x)) = -\arctan f(x)$ vérifie $\phi'(x) < 0$, $\phi(0) = 0$ et $\phi(x) \to 0$ en $+\infty$
Par ailleurs $\phi(x)$ tend vers $\pm\pi/2$ quand x tend vers $1^{\pm}$. Les deux courbes ci-dessous donnent successivement $|T(x)|$ et $\phi(x)$





XXXI

On considère la fonction de transfert
$f(\omega) = \dfrac{K}{R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ d'un circuit RLC.

K est une constante complexe et R, L, C des réels positifs. ω représente la pulsation du circuit ($\omega > 0$), exprimée en $rad.s^{-1}$

1°. Etudier les variations de $h(\omega) = \dfrac{1}{R}(L\omega - \dfrac{1}{C\omega})$.
Déterminer en fonction de R et C la valeur de ω qui annule h.

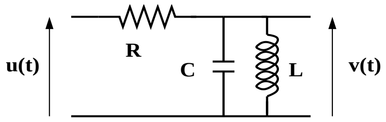
$h(\omega) = \dfrac{1}{R}(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}) \Rightarrow h'(\omega) = \dfrac{1}{R}(L + \dfrac{1}{C\omega^2}) > 0$ et h est donc croissante. $\lim\limits_{\omega\to 0} f(\omega) = -\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega) = +\infty$

2°. Représenter dans le plan complexe l'ensemble Δ des points d'affixe $1 + ih(\omega)$.
En déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\dfrac{1}{1+ih(\omega)}$. En déduire enfin l'ensemble des points d'affixe $f(\omega)$

D'après la question précédente, h envoie $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, les points d'affixes $1+ih(\omega)$ parcourt $\Delta : x=1$ et les points d'affixes $(1+ih(\omega))^{-1}$ parcourt donc un cercle de diamètre $]O,A[$, O et $A(1,0)$ étant exclus.

XXXII

On considère la cellule RLC ci-dessous :



1°. Démontrer que la fonction de transfert de ce montage est $F(\omega) = \dfrac{1}{1+iR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$

C'est évident en appliquant les formules du cours : la sortie est branchée sur la bobine et l'ensemble du circuit peut se voir comme une résistance montée en série sur un couple condensateur et bobine en parallèle. D'où :

$$\frac{L\omega i}{R + \frac{1}{\frac{1}{C\omega i}+L\omega i}} = \frac{1}{1+iR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

2°. On pose $G(\omega) = |F(\omega)|$ qui est le gain du système.
Montrer que $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$
Il suffit de calculer le module de la fonction précédente.

3°. Soit $\begin{array}{rcl} U :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \omega & \mapsto & U(\omega) = 1+R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2 \end{array}$

Calculer $U'(\omega)$ et en déduire l'expression de $G'(\omega)$. Montrer que ces deux fonctions sont de signes contraires.

On a $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{U(\omega)}}$, et donc $G'(\omega) = -\dfrac{1}{2}U'(\omega)U(\omega)^{-3/2}$
$U'(\omega) = \dfrac{2R^2}{L\omega}(C + \dfrac{1}{L\omega^2})(LC\omega^2 - 1)$

4°. Effectuer l'étude de $G(\omega)$.

Ainsi, G et U ont des sens de variations opposés.
$U'(\omega) > 0 \iff LC\omega^2 \geq 1$ ie $\omega > 1/\sqrt{LC}$

On en déduit le tableau de variations de G qui croit de 0 à 1 quand ω croit de 0 à $1/\sqrt{LC}$ puis qui décroit de 1 à 0 quand ω croit de $1/\sqrt{LC}$ à $+\infty$

5°. Soit ω_0 la valeur de ω pour laquelle H est maximale. On appelle pulsation de coupure à -3 dB toute valeur de ω telle que $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}G(\omega_0)$. Montrer qu'il existe deux coupures ω_1 et ω_2 que l'on calculera.

$\lim\limits_{\omega\to 0} G(\omega) = 0 = \lim\limits_{\omega\to+\infty} G(\omega)$

$$G(\frac{1}{\sqrt{LC}}) = \left[1+R^2\left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2\right]^{-1/2} = 1$$

G est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de deux valeurs ω_1 et ω_2 vérifiant la condition et telles que $0 < G(\omega_1) < 1$
$0 < G(\omega_2) < 1$

6°. $[\omega_1, \omega_2]$ s'appelle la bande passante du filtre. La déterminer.

$G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff 1 + R^2(C\omega - \dfrac{1}{L\omega})^2 = 2$
$\iff C\omega - \dfrac{1}{L\omega} = \dfrac{1}{R}$