MATHEMATIQUES TD N°1 : NOMBRES COMPLEXES.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

I Calculer sous forme algébrique.

1°. $(3-4i)(1+i)$ 2°. $1+i+i^2+i^3$ 3°. $(1+2i)^2+(2-i)^2$ 4°. $(2+i)^3$ 5°. $2(1+i)-\dfrac{1}{2+i}$

6°. $\dfrac{2+3i}{4-i}$ 7°. $\dfrac{1}{2-i}-\dfrac{3-2i}{1+2i}$ 8°. $\dfrac{2-i}{1+i}+\dfrac{1-i}{2+i}$ 9°. $\dfrac{5+5i}{3-4i}$ 10°. $3(\dfrac{1+i}{1-i})^2-2(\dfrac{1-i}{1+i})^3$

11°. $\dfrac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i}$ 12°. $\dfrac{(2+i)(3+2i)}{2-i}$ 13°. $\dfrac{3+4i}{(1+3i)(1+i)}$ 14°. $(1+i)(3-2i)$ 15°. $(4+2i)^2$

16°. $\dfrac{3-2i}{1+i}$ 17°. $\dfrac{3-4i}{2i-1}$ 18°. $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$ 19°. $\dfrac{1+2i}{-3+4i}$ 20°. $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(-1+2i)^3-(2+i)^3}$

II Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1°. $(1+i)z+(2-3i)\bar{z}=18-i$ 2°. $z^2+z\bar{z}=0$ 3°. $iz^2-2\bar{z}+2-i=0$ 4°. $z^2=\bar{z}$

5°. $z+\bar{z}-4=0$ 6°. $z-\bar{z}+5=0$ 7°. $iz+(2+3i)\bar{z}=1$ 8°. $z^2=\bar{z}^6$

III Mettre sous forme exponentielle.

1°. $1+i$ 2°. $-3i$ 3°. $-\sqrt{17}$ 4°. $-1+i\sqrt{3}$ 5°. $(1+i)^{2000}$ 6°. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

7°. $\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}$ 8°. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$ 9°. $\dfrac{\sqrt{2}}{i(1+i)^3}$ 10°. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^4$ 11°. $\left(\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}\right)^8$ 12°. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$

13°. $-2-2i$ 14°. $(-1+i\sqrt{3})^5$ 15°. $(-1-i\sqrt{3})^5$ 16°. $-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$ 17°. $\dfrac{1+i}{i-\sqrt{3}}$ 18°. $\dfrac{(1+\sqrt{2}+i)^{20}}{(1+\sqrt{2}-i)^{20}}$

IV Cosinus et sinus d'angles classiques.

1°. Module et argument de $u=\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $v=1-i$ et $w=\dfrac{u}{v}$. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

2°. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

3°. Calculer le module et l'argument de $z=u+v$ avec $u=-1+i$ et $v=-\sqrt{2}$. En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{8}$.

4°. Calculer les racines carrées de $z=1+i$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

5°. Soit $u=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calculer u^2 et en déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

V Polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1°. Soit P le polynôme défini pour tout $z\in\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(2+2i)z^2-(13+6i)z+20+56i$

1.1. Montrer que P admet une racine réelle a que l'on déterminera.
1.2. Déterminer b et c tels que $P(z)=(z-a)(z^2+bz+c)$ puis résoudre $P(z)=0$.
1.3. Soient z_1 et z_2 les deux racines non réelles de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_1|\leq|z_2|$
Déterminer la nature du triangle MM_1M_2 où M_1 est le point d'affixe z_1, M_2 celui d'affixe z_2 et M d'affixe a.

2°. Soit $P(z)=z^3-(5+3i)z^2+(6+10i)z-8i$.

2.1. Montrer que P admet une racine réelle que l'on calculera.
2.2. En déduire les autres racines et la factorisation de P.
2.3. On note R, S, T les points dont les affixes sont les racines de P (R point d'abscisse minimale et S d'affixe réelle. Déterminer la nature du triangle RST).

3°. On considère le polynôme $P(z)=z^4-2z^3+az^2-2z-2$, $a\in\mathbb{R}$.

3.1. Déterminer a pour que i soit racine de P.
3.2. En déduire les autres racines de P et sa factorisation dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

4°. Résoudre $z^3-(4-i)z^2+5(1-i)z-6+6i=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.

5°. Résoudre $z^3 - z^2 - 14iz^2 - 58z + 2iz + 68i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

6°. Résoudre $z^4 - (1+i)z^3 + (2+i)z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0$ (elle admet une racine réelle et une imaginaire pure).

7°. Soit $P(z) = z^7 - 8z^4 + z^3 - 8$. Montrer que $P(z) = (z^3 - 8)(z^4 + 1)$. En déduire les racines de l'équation $P(z) = 0$

VI Racines nièmes d'un complexe.

1°. Déterminer les racines carrées de : $u = -15 + 8i$, $v = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$, $w = 4i - 3$ et $x = -7 - 24i$

2°. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $E_1 :\ z^8 - 1 = 0$ puis $E_2 :\ z^3 = 1 - i$ et $E_3 :\ z^5 + 32i = 0$.

3°. Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Calculer u^2, u^4 et en déduire $|u|$ et $\arg u$

4°. Soit $P(z) = (1 - z)(1 + z + z^2 + ... + z^6)$ et soit $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$

Calculer $P(\alpha)$, en déduire la valeur de $S = \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^6$ et celle de $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

VII

1°. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et l'argument de :

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad 1 + i\tan\alpha \quad \frac{1}{1 + i\tan\alpha} \quad \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$$

2°. En déduire $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\tan 2\alpha$ en fonction de $\tan\alpha$

3°. Calculer alors $\tan\dfrac{\pi}{4}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$

4°. développer $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^6$ et en déduire $\cos 6\alpha$ et $\sin 6\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$
En déduire $\tan 6\alpha$ en fonction de $\tan\alpha$ et montrer que $\tan\dfrac{\pi}{24}$ est solution d'une équation à expliciter.

VIII

Soit $P(x) = (x + 1)^7 - x^7 - 1$. On note j le complexe $e^{2\pi i/3}$

1°. Démontrer que 0 et -1 sont racines de P.
2°. Quel est le degré de P ? Rappeler pourquoi $1 + j + j^2 = 0$. Démontrer que j et j^2 sont racines de P.
3°. On dit que α est racine double de P si $P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$.
Démontrer que α racine double de $P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$
4°. En déduire que j est racine double de P et factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

IX

Soit $j = e^{2\pi i/3}$, soit z un complexe et u l'une de ses racines cubiques.

1°. Montrer que uj et uj^2 sont aussi racines cubiques de z.
2°. Calculer $(1 - 2i)^3$
3°. Résoudre $z^3 = -11 + 2i$

X

Soit $u = e^{2\pi i/5}$, soit $x = \cos\dfrac{2\pi}{5}$, soient $v = u + u^4$ et $w = u^2 + u^3$

1°. Calculer $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$
2°. Exprimer v et w en fonction de x.
3°. En déduire une équation du second degré dont x est solution, puis la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$

XI

On considère les deux équations $E_1 :\ z^5 - 1 = 0$ et $E_2 :\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1°. Résoudre E_1 et en déduire les solutions de E_2.
2°. Soit $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Vérifier que $P(z) = z^2\left[(z^2 + \dfrac{1}{z^2}) + (z + \dfrac{1}{z}) + 1\right]$ si $z \neq 0$
3°. On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$. Montrer que $P(z) = z^2 f(u)$ où f est un polynôme de degré 2 à déterminer.
4°. Résoudre $f(u) = 0$ et en déduire les solutions de E_2

5°. En comparant les solutions de E_2, calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5}$

XII Résolution d'équations.

1°. $z^2 = z$	2°. $z^2 - z - 1 = 0$	3°. $z^2 - z + 1 = 0$	4°. $z^2 + 2\sqrt{3}z + 1 = 0$
5°. $5z^2 + 2z + 10 = 0$	6°. $iz^2 - 2iz + i - 2 = 0$	7°. $z^5 - 2z^4 - z + 2 = 0$	8°. $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$
9°. $1 + \bar{z} + z^2 = 0$	10°. $z^4 + z^2 + 1 = 0$	11°. $z^2 = -8 + 6i$	12°. $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$
13°. $z^2 + 2iz + i\sqrt{3} = 0$	14°. $z^3 - z^2 - z = 0$	15°. $z^2 - 2rz\cos\theta + r^2 = 0$	16°. $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$

XIII

On pose $P(x) = x^6 - 8\sqrt{2}x^3 + 64$ et $Q(x) = x^2 - 8\sqrt{2}x + 64$

1°. Déterminer les deux racines de $Q(x) = 0$.
2°. En déduire les racines de $P(x) = 0$.
3°. On note x_1, x_2, x_3 les racines de $P(x) = 0$ dont la partie imaginaire est positive, classés par partie réelle décroissante. Factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.
4°. Calculer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\cos(\dfrac{7\pi}{12})$

XIV

On cherche un polynôme $P(x)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(5t) = P(\cos t)$. On pose $S = (\cos t + i\sin t)^5$

1°. Déterminer $\Re e(S)$ et en déduire l'expression de $P(x)$.
2°. Démontrer que $P(x)$ possède 5 racines distinctes $x_0 > x_1 > ... > x_4$ dans l'intervalle $[-1, 1]$. Les calculer.
3°. Déterminer $t_k \in [0, \pi]$ tel que $x_k = \cos(t_k)$ pour $k = 0, ..., 4$.
4°. Calculer $\cos(\pi/10)$ et $\cos(7\pi/10)$

XV

On considère le polynôme $P(x) = x^6 + 1$

1°. Déterminer les racines sixièmes de -1 et les regrouper par conjugués.
2°. En déduire la factorisation de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$

XVI

Soient $P(x) = x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$ et $Q(x) = P(x^4)$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$
On note également $S = \sin(\theta/4)$ et $C = \cos(\theta/4)$

1°. Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines de P en fonction de θ et en déduire celles de Q.
2°. Tracer ces racines dans le plan complexe. Conclusion ?
3°. Déterminer θ pour que les racines de Q forment un octogone régulier dont vous calculerez l'aire.

XVII

On considère l'équation $E :\ z^{2n} - 1 = 0$ et l'on note $S(z) = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2n-2}$

1°. Calculer $S(z)$.
2°. Résoudre E ; en déduire les solutions de $S(z) = 0$
3°. Soient $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et $k' = 2n - k$. Quel est l'ensemble décrit par k' ?
On pose $z_k = \exp(ik\pi/n)$; comparer z_k et $z_{k'}$ et en déduire que $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'}) \in \mathbb{R}[z]$
Exprimer ce polynôme en fonction de z, k, n
4°. Montrer que

$$S(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z\cos(\frac{k\pi}{n}) + 1 \right)$$

5°. En considérant $S(i)$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{n})$

6°. Calculer $S(1)$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k}{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Thèmes divers.

XVIII Equation du troisème degré : méthode de Cardan.

On cherche à résoudre $E : X^3 + aX^2 + bX + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose pour cela $X = x + \alpha$ avec $x, \alpha \in \mathbb{C}$.
1°. Quelle valeur faut-il donner à α pour que l'équation satisfaite par x ne contienne pas de terme x^2 ?
2°. Montrer que la résolution de E est équivalente à celle de l'équation $E^* : x^3 + px + q = 0$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.
3°. Montrer que $\forall s \in \mathbb{C}$, $\forall p \in \mathbb{R}$, il existe deux complexes u et v tels que :

$$\begin{cases} u + v = s \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

4°. On pose $x = u + v$ et $uv = -\dfrac{p}{3}$.Montrer que la résolution de E* revient alors à résoudre :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En déduire que u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré dont on calculera le discriminant.
Soit δ l'une des racines carrées de ce discriminant.Exprimer u^3 et v^3 en fonction de q et δ.

5°. Appliquer cette méthode pour résoudre les équations :

$$E_1 : x^3 - 15x - 126 = 0 \quad E_2 : x^3 - 12x - 8\sqrt{2} = 0 \quad E_3 : x^3 - 15x - 4 = 0 \; E_4 : x^3 + 3x^2 + 15x + 78 = 0$$

6°. Montrer que $z = (\alpha + j\beta + j^2\gamma)^3$ ne prend que deux valeurs z_1 et z_2 lorsque l'on permute α, β, γ.
Former l'équation du second degré ayant z_1 et z_2 comme racines et en déduire une méthode de résolution.

7°. En exprimant $\cos 3\alpha$ par rapport à $\cos \alpha$, montrer que l'équation $\cos 3\alpha = a$ se ramène à une équation de degré 3 avec $p^3 + 27q^2 < 0$ si $|a| < 1$

Réciproquement, montrer que si $4p^3 + 27q^2 < 0$, alors il existe p et q tels que l'équation admette comme racine $\rho \cos \phi$, $\rho \cos(\phi + 2\pi/3)$ et $\rho \cos(\phi + 4\pi/3)$. Calculer ρ et $\cos 3\phi$ en fonction de p et q.
Résoudre ainsi l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$

XIX

1°. Montrer que toute équation de degré 4 de la forme $X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ se ramène à une équation du type $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ en posant $X = x + \alpha$
2°. Montrer que cette dernière équation peut se mettre sous la forme $S(x)^2 + T(x) = 0$ où $S(x)$ et $T(x)$ sont des polynômes de degré 2 avec $S(x) = x^2 + \beta$. On pourra poser $T(x) = u(x + \gamma)^2$ pourvu que β soit solution de $\phi(\beta) = 0$ équation de degré 3 à expliciter.

3°. En déduire que, si l'on trouve les solutions de $\phi(\beta) = 0$, on peut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation initiale.

4°. Résoudre $x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0$
En déduire les trois factorisations en produit de deux trinômes et la résolution dans $\mathbb{C}$. Représenter les solutions dans le plan complexe. Quelle est leur somme ? Leur produit ?

5°. Résoudre $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8 = 0$. Déterminer les modules et arguments des solutions, ainsi que leur somme et leur produit. Factoriser le polynôme correspondant dans $\mathbb{R}$

XX Entiers de Gauss.

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} /\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.
$\forall u = a + ib \in \mathbb{Z}[i],\ N(u) = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$ est la norme de u.

1°. Quel est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?
2°. Démontrer que $\forall u, v \in \mathbb{Z}[i],\ N(uv) = N(u)N(v)$
3°. Un entier de Gauss u est inversible s'il existe un autre entier de Gauss v tel que $uv = 1$.
Démontrer que u est inversible ssi $N(u) = 1$. En déduire l'ensemble $\mathbb{Z}[i]^\times$ des éléments inversibles.
4°. Nous allons démontrer l'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$. Il s'agit de démontrer que
$\forall u, v \in \mathbb{Z}[i], \exists\, q, r \in \mathbb{Z}[i] /\ u = vq + r$ et $N(r) < N(v)$
Pour cela, étudier le complexe u/v et démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, il existe $v \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z - v) < 1/2$ (faire un dessin). Conclure.

XXI

1°. L'identité de Diophante (III ième siècle avJC) : Démontrer que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Conclure quant à l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés.
Sachant que $13 = 9 + 4$ et $29 = 25 + 4$, décomposer 377 en somme de deux carrés, et ce de deux façons différentes.

2°. L'identité de Brahmagupta (628 ap JC) : Démontrer que $(a^2+ub^2)(c^2+ud^2)=(ac+bud)^2+(ad-ubc)^2$
(On considèrera $v=\sqrt{u}$)

3°. L'identité d'Euler : Démontrer que $|u|^2+|v|^2)(|u'|^2+|v'|^2)=|uu'-vv'|^2+|u\bar{v'}+v\bar{u'}|^2$
$\forall u,v,u',v'\in\mathbb{C}$. Qu'en est-il de la somme de quatre carrés ?

4°. Démontrer que $\sqrt{2}|a+b+c|\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$
Donner une interprétation en géométrie dans l'espace.

XXII Exponentielles et logarithmes complexes.

Pour tout complexe $z=a+ib=re^{i\theta}$ on pose $e^z=e^{a+ib}$ et $\log z=\log(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$

1°. Démontrer que e^z a les mêmes propriétés que la fonction réelle e^x et que ces fonctions coïncident si $z\in\mathbb{R}$.
2°. Démontrer que e^z est périodique de période $2\pi i$.
3°. Calculer $|e^z|$ et $arg(e^z)$.
4°. On admet que $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{zx}=0\iff\lim\limits_{x\to+\infty}|e^{zx}|=0$
Ceci nous permet de définir la notion de limite dans $\mathbb{C}$. A quelle condition sur z a-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{zx}=0$?
5°. Déterminer le domaine de définition du logarithme complexe. Calculer $\log i$.
6°. Calculer $|\log z|$ et $arg(\log z)$. Calculer $\log(zz')$ et $\log(z/z')$. Déterminer le module et l'argument de $\log(1-i)$

XXIII Noyau de Dirichlet et sommes trigonométriques.

Pour tout entier n, on pose $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $V_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ et $D_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}e^{ikx}$

1°. En posant $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{ikx}$, démontrer que

$$U_n=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}\text{ et }V_n=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}$$

2°. Démontrer que $D_n(x)=1+2\sum\limits_{k=0}^{n}\cos kx$
3°. Démontrer que $D_n(x)$ est une fonction réelle, paire et 2π-périodique. A l'aide d'un ordinateur, tracer les courbes représentatives de $D_n(x)$ pour différentes valeurs de n.
4°. Démontrer que

$$D_n(x)=\frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

si $x\neq 2k\pi$. Que vaut $D_n(x)$ si $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$?

5°. Déterminer les valeurs de x qui annulent $D_n(x)$.

Complexes et géométrie.

XXIV Ensemble de points.

1°. Soit M un point d'affixe z=a+ib et soit $\omega=\dfrac{z+i}{z-i}$
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\omega\in\mathbb{R}$, $\omega\in i\mathbb{R}$, $arg(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$, $arg(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$.

2°. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(z-1)(\bar{z}-i)\in\mathbb{R}$, puis tel que $(z-1)(\bar{z}-i)\in i\mathbb{R}$

3°. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-2+3i|=2$, puis tels que $|z-i|=|z+1-i|$.

XXV Propriétés des inversions.

1°.On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
Soit Δ une droite ne passant pas par O et H son projeté orthogonal sur Δ.
Déterminer géométriquement l'image de Δ par l'inversion de pôle O et de puissance $k\neq 0$.
2°. On considère la droite D d'équation $ax+by+c=0$, $c\neq 0$.
Déterminer analytiquement son image par la même inversion.
3°. Déterminer de même l'image d'une droite passant par O.
4°. Appliquer les résultats ci dessus pour trouver les images des droites d'équation $y=x+1$ puis $y=2x$.

Applications à l'électronique.

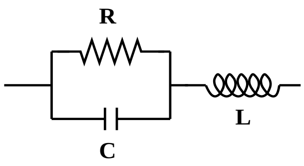
XXVI

Soit $Z(\omega)$ l'expression d'une impédance complexe donnée par $Z(\omega) = \dfrac{1+i\frac{\omega}{\omega_1}}{1+i\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_2 > \omega_1$ et $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}_+$

1°. Mettre $Z(\omega)$ sous forme algébrique $X(\omega) + iY(\omega)$ et déterminer $|Z(\omega)|$
2°. Soit $\phi = arg(z)$.Montrer que $\phi \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ et déterminer $\tan\phi$.
3°. Calculer les limites de $|Z(\omega)|$ et $arg(Z(\omega))$ quand $\omega \to +\infty$ puis quand $\omega \to 0$

XXVII

On considère le montage suivant, alimenté par un courant alternatif de pulsation ω.



1°. Calculer l'impédance complexe $Z(\omega)$ du circuit.
2°. Déterminer $|Z(\omega)|$ et $arg(Z(\omega))$. Application numérique : $R = 10\ \Omega$, $L\omega = \frac{1}{C\omega} = 200\ \Omega$.

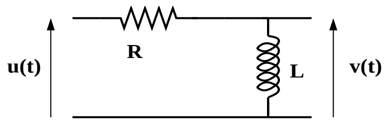
XXVIII

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système est définie par $H(p) = \dfrac{2p}{p^2+2p+4}$ avec $p = i\omega$, $\omega \in [0, +\infty[$.

1°. Montrer que l'on peut écrire $H(i\omega) = \dfrac{1}{1+if(\omega)}$ où f est une fonction numérique que l'on déterminera.
2°. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
3°. Quel est l'ensemble E_1 décrit par le point M_1 d'affixe $z = 1 + if(\omega)$ lorsque ω décrit $]0, +\infty[$.
4°. Quel est l'ensemble E_2 décrit pat M_2 d'affixe $Z = H(i\omega)$ lorsque lorsque ω décrit $]0, +\infty[$.

XXIX Circuit RL.

On considère la fonction de transfert $H(\omega)$ de la cellule RL ci-dessous :



1°. Démontrer que $H(\omega) = \dfrac{iL\omega}{R+iL\omega}$

2°. On pose $\omega_0 = R/L$. Exprimer $H(\omega)$ en fonction de ω et ω_0.

3°. Calculer et étudier $G(\omega) = |H(\omega)|$ et $\phi(\omega) = Arg(H(\omega))\cdot$

XXX Cercle de Nyquist et diagrammes de Bode.

Un montage a pour fonction de transfert $T = \dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2}$ avec $Z_1 = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{C\omega i})$ et $Z_2 = \dfrac{2R}{1-ix}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ où $x = RC\omega$.

1°. Exprimer Z_1 en fonction de R et x puis calculer $\dfrac{1}{T}$ en fonction de x. En déduire l'expression de T en fonction de x.
2°. Etudier $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2}$ pour $x \in]0, +\infty[$ et en déduire le parcours dans le plan complexe du point M d'affixe T.
3°. Etudier les fonctions numériques $|T(x)|$ et $\phi(x) = arg(T(x))$.

XXXI Circuit RLC

On considère la fonction de transfert $f(\omega) = \dfrac{K}{R+i(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ d'un circuit RLC.

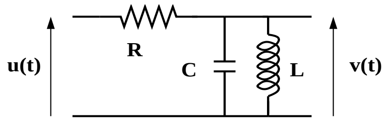
K est une constante complexe et R, L, C des réels positifs.
ω représente la pulsation du circuit ($\omega > 0$), exprimée en $rad.s^{-1}$

1°. Etudier les variations de $h(\omega) = \dfrac{1}{R}(L\omega - \dfrac{1}{C\omega})$. Déterminer en fonction de R et C la valeur de ω qui annule h.

2°. Représenter dans le plan complexe l'ensemble Δ des points d'affixe $1+ih(\omega)$.
En déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\dfrac{1}{1+ih(\omega)}$. En déduire enfin l'ensemble des points d'affixe $f(\omega)$

XXXII Filtre passe-bande

On considère la cellule RLC ci-dessous :



1°. Démontrer que la fonction de transfert de ce montage est $F(\omega)=\dfrac{1}{1+iR(C\omega-\frac{1}{L\omega})}$

2°. On pose $G(\omega)=|F(\omega)|$ qui est le gain du système. Montrer que $G(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}$

3°. Soit $\begin{array}{rccl} U: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \omega & \mapsto & U(\omega)=1+R^2(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2 \end{array}$

Calculer $U'(\omega)$ et en déduire l'expression de $G'(\omega)$. Montrer que ces deux fonctions sont de signes contraires.

4°. Effectuer l'étude de $G(\omega)$.

5°. Soit ω_0 la valeur de ω pour laquelle H est maximale. On appelle pulsation de coupure à -3 dB toute valeur de ω telle que $G(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}G(\omega_0)$. Montrer qu'il existe deux coupures ω_1 et ω_2 que l'on calculera.

6°. $[\omega_1,\omega_2]$ s'appelle la bande passante du filtre. La déterminer.

QCM de concours

BE 1998

On considère trois points du plan A, B, S non alignés. On suppose que A est d'affixe -1, B d'affixe 1 et l'on note $s=u+iv$ l'affixe de S. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABS, Ω son centre et ω l'affixe de Ω.
F est le point où la droite orthogonale à (AB) issue de S recoupe $\mathcal{C}$ et H le symétrique de F par rapport à la droite (AB). Il est conseillé de faire un dessin.

1°. Le point M d'affixe z appartient à la médiatrice de (A,B) si et seulement si $\bar{z}+z=0$
2°. Le point M d'affixe z appartient à la médiatrice de (A,S) si et seulement si $(1+\bar{s})z+(1+s)\bar{z}+|s|^2-1=0$
3°. $\omega=\dfrac{1-|s|^2}{(s-\bar{s})}$
4°. Le point M d'affixe z appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(z-\omega)(\bar{z}-\bar{w})=(1-\omega)(1-\bar{\omega})$
5°. Le point M d'affixe z appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $|z|^2+\dfrac{1-|s|^2}{s-\bar{s}}(\bar{z}-z)=1$
6°. F et H ont pour abscisse u
7°. L'affixe de H est $u+i\dfrac{u^2-1}{v}$
8°. Deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont orthogonaux si et seulement si $z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=0$
9°. Les droites (AH) et (BS) sont orthogonales
10°. Pour toute position de S, H est le centre de gravité du triangle ABS

BE 1999

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct, on se donne trois points non alignés A d'affixe a, B d'affixe b et C d'affixe c, tels que le triangle ABC est parcouru dans le sens direct.
A l'extérieur de ce triangle, on construit trois triangles rectangles en A', B' et C' et isocèles CBA', ACB' et ABC'
On a donc $\widehat{BCA'}$, $\widehat{CAB'}$, $\widehat{ABC'}$ qui sont trois angles de mesure $\frac{\pi}{4}$.
On trace les doites (AA'), (BB') et (CC') et l'on appelle K l'intersection de (AA') et (BB')
On pose enfin $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et si un point M a pour affixe z, on le note $M(z)$

1°. L'image $M'(z')$ d'un point $M(z)$ dans une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre $S(s)$ est d'affixe $z'=\omega z+(1-\omega)s$
2°. L'affixe b' de B' est $b'=\omega c+(1-\omega)a$
3°. L'affixe a' de A' est $a'=\omega c+(1-\omega)b$
4°. Le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ a pour affixe $z=(2\omega-1)a+(1-\omega)b-\omega c$

5°. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour affixe $z = -a + \omega b + (1-\omega)c$
6°. On a $\omega^2 = 2i$
7°. $z_{\overrightarrow{B'C'}} = -iz_{\overrightarrow{AA'}}$
8°. Les droites (AA') et $(B'C')$ ne sont pas en général perpendiculaires.
9°. Le point K est toujours l'orthocentre du triangle $A'B'C'$
10°. Le point K est toujours le centre de gravité du triangle $A'B'C'$

BE 2000

Soit la fonction polynôme de la variable complexe z définie par :
$P(z) = z^3 - (5+3i)z^2 + (6+10i)z - 8i$
On associe à tout complexe $z = x + iy$ le point $M(x,y)$ dans un repère orthonormé.
On note R, S, T les points dont les affixes sont les racines du polynôme $P(z)$,
R étant le point d'abscisse minimale et S le point d'affixe réel.

1°. Si z est une racine réelle de $P(z)$, on a $z^3 = 5z^2 - 6z$
2°. Si z est une racine réelle de $P(z)$, on a $3z^2 - 10z + 8 = 0$
3°. Il existe une racine réelle a de $P(z)$ et $P(z) = (z-a)(z^2 + (3-2i)z + 4i)$
4°. Les racines complexes de $P(z)$ sont conjuguées entre elles.
5°. Une racine carrée du complexe $2i$ est $1+i$
6°. Le triangle RST est équilatéral.
7°. Le triangle RST est rectangle en R.
8°. Le cercle circonscrit au triangle RST a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 3x - y + 2 = 0$
9°. Le centre du cercle circonscrit au triangle RST est sur la droite (ST)
10°. Le centre du cercle inscrit dans le triangle RS a pour coordonnées $(3-\sqrt{2}, 1)$

BE 2001

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $\Im m(z) > 0$, c'est à dire que $\mathcal{D}$ est le demi-plan supérieur ouvert limité par (xx') et $\Delta = \mathbb{C}/\{x \in \mathbb{R}/\ |x| \geq 1\}$
On définit sur $\mathcal{D}$ la fonction $F : \mathcal{D} \longrightarrow \Delta$ par $F(z) = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$
w est un complexe fixé de Δ, on cherche à déterminer z tel que $F(z) = w$.

1°. L'équation $z^2 - 2wz + 1 = 0$ possède deux racines z_1 et z_2, complexes conjugués.
2°. Les racines de $z^2 - 2wz + 1 = 0$ sont inverses l'une de l'autre et une seule est dans $\mathcal{D}$.
3°. Si $w = e^{i\pi/6}$, alors les complexes δ tels que $\delta^2 = w^2 - 1$ sont $e^{i\pi/6}$ et $-e^{i\pi/6}$
4°. Si $w = e^{i\pi/6}$, l'unique $z \in \mathcal{D}$ tel que $w = F(z)$ est $z = (\sqrt{3}-1)\dfrac{1+i}{2}$
5°. Si w décrit le segment $]-1, 1[$, z décrit un demi-cercle de rayon 1.

Ici, Γ est la courbe image par F de la demi-droite de $\mathcal{D}$ définie par $z = re^{i\pi/4}$ avec $0 < r < \infty$.
On pose $F(z) = w = u + iv$, avec u et v réels et on recherche une équation cartésienne de Γ. On note $M(r)$ le point de la courbe Γ de paramètre r.

6°. $u + v = r\sqrt{2}$
7°. L'équation cartésienne de Γ est $u^2 - v^2 = 1/2$
8°. Un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(r)$ a pour composante $(r^2 - 1, r + 1)$
9°. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $(\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+r^2)}, 0)$
10°. Quand $r \to +\infty$, la courbe Γ est asymptote à la droite d'équation $u = v + 1$

BE 2002

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'axes (Ox, Oy). On associe à tout point du plan $M(x,y)$ le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M. On note O, A les points d'affixes 0 et 1 et B, C les points symétriques par rapport à (Ox) tels que les triangles OAB et OAC soient équilatéraux avec $\Im m(b) > 0$, b étant l'affixe de B.

Soit Ω le milieu du segment $[AC]$, d'affixe ω. Soit ϕ_1 l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle de mesure $\pi/3$. Soit ϕ_2 l'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle de mesure $2\pi/3$. Soit enfin $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$.

Pour répondre aux questions suivantes, on sera amené à calculer les affixes ω, b, c de Ω, B, C et à exprimer $\phi_1(z), \phi_2(z)$ et $\phi(z)$ en fonction de z, b, ω.

1°. On a $\omega = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}$
2°. On a $\phi_1(z) = 1 + \exp(\dfrac{2\pi i}{3})z$
3°. On a $\phi(z) = \omega + z$

4°. ϕ est l'expression complexe de la symétrie par rapport à Ω.
5°. On a $1-\exp(\frac{i\pi}{3})=\exp(-\frac{i\pi}{3})$

On veut maintenant caractériser l'ensemble E des points M d'affixe z tels que M, M' d'affixe $z'=\phi_1(z)$ et M'' d'affixe $z''=\phi(z)$ soient alignés.

6°. Les points d'affixes z, z', z'' sont alignés ssi $(z-z')(\bar{z}-\bar{z''})=(\bar{z}-\bar{z'})(z-z'')$
7°. Les points d'affixes z, z', z'' sont alignés ssi $e^{-i\pi/3}z(\bar{z}-\bar{\omega})=e^{i\pi/3}\bar{z}(z-\omega)$
8°. L'ensemble E est caractérisé par $z\bar{z}=\Im m(e^{i\pi/6}\bar{z})$
9°. L'équation cartésienne de E est $x^2+y^2=y\sqrt{3}/2-x/2$
10°. L'ensemble E est le cercle Γ de diamètre $[OC]$

BE 2003

Soit $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $P(x)=x^2-2\cos\theta x+1$ et $Q(x)=P(x^4)$
On note également $S=\sin\frac{\theta}{4}$ et $C=\cos\frac{\theta}{4}$

On appelle θ_0 le réel pour lequel les racines de Q sont représentées géométriquement par les sommets d'un octogone régulier d'aire s et de longueur de côté a.

1°. Les racines de P sont $\alpha=e^{i\theta}$ et $\beta=-e^{-i\theta}$
2°. Les racines de l'équation $x^4=e^{i\theta}$ sont représentées par les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigo.
3°. Si $e^{i\phi}$ est racine de Q, alors $x^2-2\cos\phi x+1$ divise Q
4°. Une des racines de Q a pour argument $\dfrac{\theta+\pi}{4}$
5°. On a $Q(x)=(x^2-2Sx+1)(x^2+2Sx+1)(x^2-2Cx+1)(x^2+2Cx+1)$
6°. La rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\theta}{8}$ transforme les points représentant les racines de $x^4=e^{i\theta}$ en ceux représentant les racines de $x^4=e^{-i\theta}$
7°. On a $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$
8°. On a $\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$
9°. La longueur a du côté de l'octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique vaut $a=2^{1/4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$
10°. L'aire de l'octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique vaut $s=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

BE 2004

Soit f l'application de $\mathbb{C}/\{2i\}\}$ dans $\mathbb{C}/\{2i\}$ définie par $f(z)=\dfrac{2iz-5}{z-2i}$.
On note $Z=f(z)$ et dans le plan muni du repère orthonormé (O,u,v), les points d'affixes respectives $z, Z, -5i/2, 2i$ sont notés m, M, A, B ; on définit ainsi l'application ponctuelle F par $M=F(m)$.
On note $\mathcal{C}(U,r)$ le cercle de centre U et rayon r. Soit E_1 l'ensemble des points m tels que $M\in(Ox)$

1°. On a $arg(Z)=(\overrightarrow{Am},\overrightarrow{Bm})$
2°. E_1 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B.
3°. Pour tout $r>0$, l'image par F de $\mathcal{C}(B,r)$ est $\mathcal{C}(B,3/r)$.
4°. Le cercle $\mathcal{C}(B,3)$ est invariant par F.
5°. Une équation de E_1 est $x^2+y^2+y/2-5=0$

Vérifier qu'il existe deux points C et D du plan invariants par F, d'affixes respectives ω_1,ω_2 que l'on calculera. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$.

6°. On a $\omega_1=-i$ et $\omega_2=2i-3$.
7°. Le cercle de diamètre $[CD]$ est invariant par F.
8°. L'image de la droite (CD) par F est le cercle de diamètre $[CD]$.
9°. On a $x=\dfrac{X-2Y}{X^2+Y^2-4Y+4}$
10°. L'image par F de la droite d'équation $x=1/2$ est le cercle $\mathcal{C}(\Omega,9)$ privé du point B, avec Ω d'affixe $-9+2i$

BE 2007

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points quelconques A, B, C d'affixe a, b, c respectivement. Le triangle ABC est quelconque, mais les sommets sont donnés dans le sens direct.
On considère les nombres complexes :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = a + (c-a)i \\ b_1 = b + (a-b)i \\ c_1 = c + (b-c)i \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} a_2 = a - (b-a)i \\ b_2 = b - (c-b)i \\ c_2 = c - (a-c)i \end{array}\right.$$

Les points sont donnés par leurs affixes : $A_i \leftrightarrow a_i$, $B_i \leftrightarrow b_i$ et $C_i \leftrightarrow c_i$.

1°. On passe de C à A_1 par une rotation de centre A et angle de mesure $\pi/2$.
2°. On passe de B à A_2 par une rotation de centre A et angle de mesure $\pi/2$.
3°. Les segments $[BA_1]$ et $[CA_2]$ ont toujours la même longueur.
3°. Les segments $[BA_1]$ et $[CB_1]$ ont toujours la même longueur.
4°. Les droites (BA_1) et (CA_2) sont toujours orthogonales.
5°. Le quadrilatère ACC_2A_1 est toujours un carré.
6°. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $a-b$.
7°. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ a pour affixe $(b+c)i$.
8°. $A_1A_2^2 = BA^2 + CA^2 + (a-b)(\bar{a}-\bar{c}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{b})$.
9°. $A_1A_2^2 + B_1B_2^2 + C_1C_2^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$