MATHEMATIQUES TD N°12 : CALCUL MATRICIEL - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

1 Arithmétique des matrices.

I.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1°. $3C - D = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $A + B$ et AC n' $\exists$ pas.

$AB = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 6 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $DC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D^3 = O$

$XY = -1$ $YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $DX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

2°. $(C + D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$C^2 + 2CD + D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi, les produits remarquables ne sont plus valables pour les matrices, sauf si celles-ci commutent.

II.

Une matrice M est nilpotente si l'une de ses puissances est nulle (ie $\exists\, k \in \mathbb{N}/\ M^k = 0$).
Toutes les puissances suivantes le sont alors aussi.

1°. $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = O$

2°. $(I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} N^k I^{n-k} = I + nN + n(n-1)/2 \times N^2$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(2n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $(I + N)^n = A^n$ car $A = I + N$

3°. $(I + N)(I - N + N^2) = I$, or
$I + N = A \Rightarrow I - N + N^2 = A^{-1}$ donc

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III.

1°. $J^2 = J + 2I$ et $J^3 = 3J + 2I$

2°. $J^2 - J = 2I \Rightarrow I = J \times \frac{1}{2}(J - I)$

$J^{-1} = \frac{1}{2}(J - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3°. $(J - I)^2 = J^2 - 2J + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

IV.

1°. $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2°. On a alors $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$ donc
$M \times \frac{1}{2}(M^2 + 2M - I) = I$ ie

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 5/2 & -13/2 & -11/2 \end{pmatrix}$

V.

1°. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -10 & 8 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -14 & 4 \end{pmatrix}$ et donc $A^3 = A^2 + 2A$

2°. Soit $B = A^{-1}$. Alors $A^2B = A$ et $A^3B = A^2$. Dans la relation ci-dessus, on aurait alors
$A^3B - A^2B + 2AB = 0 \Rightarrow A^2 - A + 2I = 0$ ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas inversible.

VI.

$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = -5 \end{array} \right.$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A' = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1°. On constate que $AX = B \iff X = (x, y, z)$ est solution du système. Résoudre le système est donc équivalent à résoudre l'équation matricielle.
2°. $AX = B \iff X = A^{-1}B$ si A est inversible. Or $AA' = I \Rightarrow A' = A^{-1}$

3°. $X = A'B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{S} = \{(1, 0, -2)\}$

VII.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = \pi \\ x + 2y + z = e \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right.$

1°. $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I \Rightarrow \alpha = 5, \beta = -4$

2°. $A(\frac{5}{4}I - \frac{1}{4}A) = I \Rightarrow A$ inversible et $A^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}A$

résoudre $\mathcal{S} \iff AX = B \iff X = A^{-1} \times \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$

VIII.

$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & a'+b' & 0 \\ b' & 0 & a' \end{pmatrix}$

1°. $M = aI + bJ$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

I est la matrice identité donc $I^2 = I, IJ = JI = J$ et $J^2 = I$. Ainsi,
$MM' = (aI + bJ)(a'I + b'J) = (aa' + bb')I + (ab' + ba')J$

2°. M inversible ssi il existe M^{-1} telle que $MM^{-1} = I$. Puisque MM' est de la même forme que M et M', une bonne idée serait de chercher la matrice sous cette forme. Par identification, on doit alors déterminer a', b' en fonction de a et b avec $\begin{cases} aa' + bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow ab' = -ba' \Rightarrow b' = -ba'/a$ si $a \neq 0$

$\Rightarrow a' = \frac{a}{a^2 - b^2}$ et $b' = -\frac{b}{a^2 - b^2}$

Ainsi, a' et b' existent si et seulement si $a \neq \pm b$ ie

$M^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & a-b & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$

IX.

Soit

$SL_2(\mathbb{Z}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ ad - bc = 1, \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. I, S, T sont à coefficients entiers et leur déterminant vaut 1 ; ils appartiennent donc à l'ensemble.

$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Une récurrence rapide montre que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ST = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2°.

$MM' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc & ab' + bd' \\ a'c + c'd & cb' + dd' \end{pmatrix}$

et $\det(MM') = \det(M) \times \det(M') = 1$

MM' est dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et l'on va donc chercher tout naturellement l'inverse de M dans cet ensemble. En utilisant les équations donnant MM' en fonction des coefficients et en identifiant MM' avec I, on obtient

$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

X. Représentation de $\mathbb{C}$ par des matrices

On pose $\mathcal{E} = \{M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\}$ et

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{E} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & z = a + ib \end{array}$$

1°. On pose $a = 1, b = 0 \Rightarrow I \in \mathcal{E}$ et M inversible $\iff a^2 + b^2 \neq 0 \iff ab \neq 0$

2°.

$\phi(M + M') = (a + a') + i(b + b') = (a + ib) + (a' + ib')$
$= \phi(M) + \phi(M')$ et de même $\phi(\lambda M) = \lambda\phi(M)$

$MM' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi(MM') = (aa' - bb') + i(ab' - ba') = (a + ib)(a' + ib')$
$= \phi(M)\phi(M')$

3°. Supposons $ab \neq 0$ alors M^{-1} existe et $MM^{-1} = I$
$\Rightarrow \phi(MM') = \phi(I) = 1$ et

$\phi(M)\phi(M') \Rightarrow \phi(M^{-1}) = \frac{1}{\phi(M)}$. Ainsi,

$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a, b \neq 0$

4°. La fonction Φ est une bijection des complexes vers un ensemble de matrices. On a transporté la structure de $\mathbb{C}$ dans cet ensemble et toute opération sur deux complexes peut se faire avec les matrices correspondantes.

XI.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1°. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M = aJ + bK$

2°. $J^2 = 2J, K^2 = 2K, KJ = JK = 0$
$M + M' = (a + a')J + (b + b')K$ $MM' = 2aa'J + 2bb'K$

3°. $a = b = 1/2 \Rightarrow I \in \mathcal{E}$ $MM' = I \iff \begin{cases} a' = 1/(4a) \\ b' = 1/(4b) \end{cases}$

ainsi, M inversible ssi $ab = 0$ et en ce cas, on a

$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$

4°. $M^2 = 2a^2J + 2b^2K$ et par une récurrence immédiate on a donc $M^n = 2^{n-1}(a^nJ + b^nK)$

XII.

On considère l'ensemble $\mathfrak{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1°. $I = M(1, 0), J = M(0, 1), M = aI + bJ$

2°. $I^2 = I, J^2 = 0$
$M + M' = M(a + a', b + b'), MM' = M(aa', ab' + ba')$

3°. $MM' = I \iff aa' = 1, b + b' = 0$

$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ qui existe ssi $a \neq 0$

4°. $a^2 = 1, 2ab = 0 \Rightarrow a = \pm 1, b = 0 \Rightarrow \mathcal{S} = \{\pm I\}$

XIII.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On note également $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1°. $I \notin \mathcal{E}$, $J = M(0,1)$ et $K = M(1,0)$

2°. $MM' = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' - a'b \\ ab' - ba' & aa' + bb' \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} \text{aa'+bb'=0} \\ \text{ab'-ba'=0} \end{cases}$
$\iff a^2 + b^2 = 0$

3°. $MN = I \Rightarrow M(a,b)^{-1} \exists \iff a, b \neq 0$ et $M^{-1} = N$

4°. $Tr(I) = 2, Tr(J) = Tr(k) = 0$ et
$M \in \mathcal{E} \iff a = -d, b = c$
$\iff Tr(M) = 0$ et $M =^t M$

XIV.

1°. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$J^2 = 2J$, $K^2 = 2K$, $JK = KJ = J$ et après calculs :
$M(a,b,c) \times M(a',b',c',d') =$
$M(aa', 2bb' + ab' + ba' + cb' + bc', 2cc' + ac' + ca')$

2°. $M(0,b,c) = bJ + cK$. Si la matrice inverse N existait, on aurait $MN = I$. Or, $MN = \alpha J + \beta K$ n'est pas facteur de I pour tout b, c donc $M(0,b,c)$ n'est jamais inversible.

3°. $MN = 0 \Rightarrow 2bb' + ba' + cb' + bc' = 0$ et $2cc' + ca' = 0$ pour tout a', b', c'. La seconde équation implique $c = 0$ et la première implique $b = 0$ donc $M(0,b,c)$ est diviseur de 0 ssi $b = c = 0$.

XV.

1°. $M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ et par récurrence, on a $M_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ en appliquant les formules de Moivre. 2°. $\det M_\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ et $M_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 3°. $Tr(M_\theta) = 2\cos\theta$ 3°. De la même façon avec les formules de trigo hyperbolique, on a $N_\theta^n = \begin{pmatrix} ch(n\theta) & sh(n\theta) \\ sh(n\theta) & ch(n\theta) \end{pmatrix}$; le déterminant reste égal à 1 et la trace vaut $2ch(\theta)$

XVI.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. $A^2 = 3A$, $A^3 = 9A$, par récurrence $A^n = 3^{n-1}A$
2°.
$(B-I)^3 = B^3 - 3B^2 + 3B - I = 0 \Rightarrow B(B^2 - 3B + 3I) = I$
donc B inversible et $B^{-1} = B^2 - 3B + 3I$

3°. A non inversible sinon il existerait A' tel que $AA' = I \Rightarrow A^2A' = A \Rightarrow 3AA' = A$ ce qui est faux

XVII.

Par récurrence, on a $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 1 \\ v_{n+1} = u_n + v_n + 1 \end{cases}$

Ie $u_1 = v_1 = 1 \Rightarrow u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

XVIII.

On a $AB = BA = \begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est égale à I ssi $ab + 2 = 1$ et $a + b + 1 = 0$
Il s'agit d'un système de 2 équations à 2 inconnues, non linéaire. De la seconde équation, on tire $b = -1 - a$ et en injectant dans la première $a^2 + a - 1 = 0$ dont les solutions sont $(-1 \pm \sqrt{5})/2$

XIX.

$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

XX.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Calculer P^2, P^3 et montrer que $P^3 + P^2 - 5P = I$.

$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 13 & -15 \end{pmatrix}$
On en déduit la relation demandée

2°. En déduire l'expression de P^{-1}.

$P(P^2 + P - 5I) = I$ et donc $P^{-1} = P^2 + P - 5I$ ie
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3°. Calculer $D = P^{-1}AP$.

Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5°. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n.

$A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times ... \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 4(2^n - 1) & 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$

6°. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + z = -11 \\ x + 2y - 2z = 50 \end{cases}$$

Le système s'exprime sous la forme $PX = B$ et sa solution (unique) est $X = P^{-1}B$.
Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2, 11, -13)\}$

XXI. Quaternions

1°. $\phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité de $\mathbb{R}^4$ (nous la noterons U par la suite).
$\phi(i) = I, \phi(j) = J, \phi(k) = K$

Par linéarité, on a donc $\phi(M(q)) = aU + bI + cJ + dK$

2°. $I = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{pmatrix}$ avec $I_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de même
$J = \begin{pmatrix} 0 & -J_0 \\ J_0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et
$K = \begin{pmatrix} 0 & -K_0 \\ K_0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $K_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$I_0^2 = -I, J_0^2 = I, K_0^2 = I, I_0J_0 = K_0, J_0K_0 = I_0, I_0K_0 = J_0$ (ce sont les propriétés de i, j, k).

Ainsi, on voit (après quelques petits calculs) que $\phi(M + M') = \phi(M) + \phi(M')$, $\phi(\lambda M) = \lambda\phi(M)$ et $\phi(MM') = \phi(M)\phi(M')$ et ϕ est bijective.

3°. $\mathcal{H} = \phi(\mathbb{H}) = \{M = aU + bI + cJ + dK; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ est la représentation matricielle des quaternions sous forme de matrices de $M_4(\mathbb{R})$

4°. $q = (a + ib) + j(c - id)$ car $-ji = k$, donc $q = u + jv$ en posant $u = a + ib$ et $v = c - id$ dans $\mathbb{C}$

5°. $\Lambda(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda(i, 0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$,
$\Lambda(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda(0, i) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
Comme ci-dessus, Λ est linéaire, injective et $\Lambda(qq') = \Lambda(q)\Lambda(q')$ avec $q = (u, v)$, $q' = (u, v)$ et $\mathcal{E} = \phi(\mathbb{H})$

6°. $MM' = \begin{pmatrix} u & -v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & -v' \\ \bar{v}' & \bar{u}' \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} uu' - v\bar{v}' & -uv' - v\bar{u}' \\ u'\bar{v} + \bar{u}\bar{v}' & -\bar{v}v' + \bar{u}\bar{u}' \end{pmatrix}$

2 Applications.

XXII. Matrices stochastiques.

1°. D'après l'énoncé, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$p + q = 1$, $p \in [0, 1]$ et pour chaque ligne, $\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = 1$

En effet, la ligne i représente une puce partant de i. Elle peut aller vers 1,2,3,4 et puisque ces déplacements représentent tous les cas possibles, la somme de la ligne vaut 1.

2°. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et
$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q + pq^2 & 0 & p^2q & p^2 \\ q^2 & pq^2 & 0 & p + p^2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont encore des matrices stochastiques.

Les éléments de la matrice P^k représentent la probabilité d'aller d'un point i à un point j en k sauts.

La diagonale d'une puissance impaire sera toujours 1001 (on reste en 1 et 4 et si le nombre de déplacements est impair on ne peut rester à la même place).

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D = BPA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On remarque que $BA = I$ donc si $D = BPA$ alors $P = ADB$; Après calculs (pénibles) : $P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$\alpha = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n$, $\beta = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n$,
$\gamma = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n$
$\lim_{n\to+\infty} \alpha = 2/3$, $\lim_{n\to+\infty} \beta = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \gamma = 1/3$
La matrice suivante donne alors les probabilités limites des différentes positions après un nombre de déplacements infini : $P^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5°. Le probème est le même. La matrice stochastique est $P = \begin{pmatrix} 1 - a & a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}$

Par identification, on a $Q^{-1} = \frac{1}{a + b} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$

On en déduit $D = Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 - a - b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$D^n = \begin{pmatrix} (1 - a - b)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis de la relation $P = QDQ^{-1}$ on en déduit que $P^n = QD^nQ^{-1}$. Le calcul donne :
$P^n = \frac{1}{a + b} \begin{pmatrix} a(1 - a - b)^n + b & -a(1 - a - b)^n + a \\ -b(1 - a - b)^n + b & b(1 - a - b)^n + a \end{pmatrix}$
Si $a + b < 1$, la limite de $(1 - a - b)^n$ est nulle en l'infini et la matrice limite est $P^\infty = \frac{1}{a + b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$
Autrement dit, après un grand nombre de déplacements, la probabilité de trouver la puce en 1 est $a/(a + b)$ et la proba de la trouver en 2 est $b/(a + b)$

XXIII. Codes correcteurs linéaires.

1°. $MG = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$E_1G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$E_2G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$NG = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On constate que E_1G est la première ligne de G et E_2G est la seconde. On constate également que $N = E_1 + E_2$ et que NG est la somme de E_1G et E_2G. Tous les syndrômes sont nuls, ce qui eset normal puisque les mots codés sont sans erreurs.

2°. $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la dernière ligne de G, son syndrôme est donc nul et il n'y a pas eu d'erreur.
Le syndrôme de $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est

$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à colonne n°4 de H ; il y a donc eu une erreur à la position 4 et le vecteur envoyé était donc le vecteur nul.
Le syndrôme de $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à la colonne n°5 de H.
L'erreur se trouve donc en position 5 et le vecteur envoyé était encore le vecteur nul.

XXIV. Matrice d'un quadripôle.

1°. La loi des mailles donne $V_2 = V_1 - ZI_1$ et $I_2 = -I_1$.
Ainsi, $\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$ ie
$T = \begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2°. De la même façon , $V_2 = V_1$, $I_1 + I_2 = I$ et $I_2 = V_1/Z - I_1$. Par identification, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/Z & 1 \end{pmatrix}$

3°. Nous avons $V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$ et $V_2 = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}$. Ainsi, $V_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2$ et $V_2 = i\omega M I_1 + i\omega L_2 I_2$ de sorte que
$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

4°. $\begin{pmatrix} V_4 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$ et
$\begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$. Enfin,
$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$.
En regroupant les trois expressions, il vient $Q = Q_3 Q_2 Q_1$ et ce produit vaut
$T = \frac{1}{Z_2} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 & -(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3) \\ -1 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$

5°. En posant $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $U_4 = aU_1 + bI_1$ et $I_4 = cU_1 + dI_1$. Il s'agit d'exprimer I_1 et I_4 en fonction de V_1 et V_4. Après calculs, on obtient
$Y = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -a & 1 \\ bc - ad & d \end{pmatrix}$. De même, comme $Z = Y^{-1}$, on obtient $Z = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -d & 1 \\ bc - ad & a \end{pmatrix}$

6°. A vous de chercher.

XXV. Graphes.

1°. $G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $G_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$G_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $G_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\widehat{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2°. (13)(32) est un chemin de G_2 et (12)(24) est un chemin de G_3. (13)(32)(24)(41) est un circuit (hamiltonien) de G_2 et (24)(42) est un circuit (hamiltonien) de G_3. Il n'y a pas de boucle dans G_2 et G_3, seulement (44) dans G_1

3°. $G_2 \cup G_3 = \{(13)(12)(23)(24)(32)(41)(42)\}$
$G_2 \circ G_3 = \{(22)(33)(34)(43)(42)\}$
$\widehat{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\widehat{G_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

XXVI. Cryptographie.

1°. $det(A) = \Delta = ad - bc$. A est donc inversible ssi $(ad - bc, N) = 1$

2°. En ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
3°. $det(A) = -5 = 21$ dans $\mathbb{F}_{26}$. A est donc inversible. Pour chiffrer, on effectue simplement le produit matriciel ; on obtient : $\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ ou encore "ROAGMFHG". Le message initial s'obtient en multipliant les digraphes codés par la matrice inverse.

4°. Les digraphes "DP" et "LW" correspondent à "AR" et "LA". On peut alors calculer A^{-1} par identification :
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}$. On obtient alors "STRIKE AT NOON !KARLA."

XXVII. Relativité restreinte.

1°. $\tanh \psi = \beta = v/c \Rightarrow \gamma^2 = 1/(1 - \beta^2) \Rightarrow \gamma^2 = \cosh^2 \psi$
$\Rightarrow \gamma = \cosh \psi$ et de $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$
$\Rightarrow \sinh \psi = -\sqrt{\gamma^2 - 1} = -\beta\gamma$

2°. $L(v) \times L(v') = L(v'')$ en posant $v'' = c \tanh(\psi + \psi')$ ou encore en notant $L(\psi)$ la matrice correspondante, on obtient donc comme loi de groupe
$L(\psi) \times L(\psi') = L(\psi + \psi')$ et $L(v)^{-1} = L(-v)$
On a également $\psi + \psi' = argtanh(\frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'})$ ie
$L(v)L(v') = L\left(\frac{v + v'}{1 + vv'}\right)$

3°. $L(v) \times E = \begin{pmatrix} \gamma x - \beta\gamma t \\ y \\ z \\ -\beta\gamma x + \gamma t \end{pmatrix} = E'$

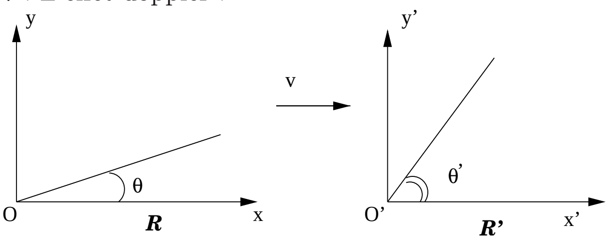
4°. $\Delta s^2 > 0 \iff c > \Delta l / \Delta t$ et la particule a alors une vitesse inférieure à la lumière. Un évènement de type lumière est un évènement se déplaçant à la vitesse de la lumière. Ces évènements forment les génératrices d'un cône appelé cône de lumière qui définit la frontière entre évènements de type espace et de type temps.

5°. $\Delta s^2 = AB^2 = 1$. Dans un autre repère, $A'(-\beta\gamma t, 0, 0, \gamma t)$ et $B'(\gamma(1 - \beta t), 0, 0, \gamma(t - \beta))$. Ainsi, $A'B'^2 = AB^2$ et $\Delta t^2 = \beta^2\gamma^2 \neq 0$
Les évènements ne sont plus simultanés dans le nouveau repère.

6°. Pour calculer le temps propre du voyage mesuré par le jumeau du vaisseau, il faut se placer dans le repère attaché au vaisseau (il y est immobile). On utilise alors les formules de Lorentz pour passer de ce repère (immobile selon le voyageur) au repère attaché à la terre :

$E = L(v) \times E' \iff$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix}$ On a alors
$10 = \gamma T$ soit $T = 0,8 \times 10 = 8$
Donc, le jumeau du vaisseau n'aura que 34 ans à son retour. Pour lui, le voyage aura duré deux ans de moins que pour son jumeau resté sur terre (et donc les voyages préservent la jeunesse). La situation n'est pas symétrique car le jumeau resté sur terre n'est pas soumis aux phases d'accélération et de décélération. Cela fait toute la différence et explique pourquoi il n'y a en fait pas de paradoxe dans cette expérience.

7°. L'effet doppler :



7.1. Dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées du quadrivecteur onde sont $\vec{K}(\frac{2\pi\nu}{c}\cos\theta, \frac{2\pi\nu}{c}\sin\theta, 0, \frac{2\pi\nu}{c})$ et dans $\mathcal{R}'$, $\vec{K}(\frac{2\pi\nu'}{c}\cos\theta', \frac{2\pi\nu'}{c}\sin\theta', 0, \frac{2\pi\nu'}{c})$
D'après les formules de Lorentz, $\vec{K'} = L(v) \times \vec{K}$ donc $\frac{2\pi\nu'}{c} = -\beta\gamma\frac{2\pi\nu}{c}\cos\theta + \gamma\frac{2\pi\nu}{c}$ de sorte que
$\nu' = \nu \times \gamma(1 - \beta\cos\theta)$
La fréquence varie selon le repère.
De même, en examinant la première coordonnée du quadrivecteur onde, on a $k'_x = \gamma(k_x - \beta\omega/c)$ ie
$\cos\theta' = \frac{\nu}{\nu'}\frac{\cos\theta - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

7.2. Si $\theta = 0$, $\gamma' = \gamma(1-\beta)\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \times \nu$
$\cos\theta' = 1 \Rightarrow \theta' = 0$; il n'y a pas de changement de direction mais seulement de fréquence (c'est l'effet Doppler longitudinal). Si l'observateur s'éloigne, $\beta > 0$ et $\nu' > \nu$: la fréquence augmente. Sinon, la fréquence diminue.

7.3. Pour toutes les galaxies, on observe un éloignement qui se caractérise par un décalage de la longueur d'onde vers le rouge : c'est le redshift des galaxies qui prouve que l'univers est en expansion.

8°. Nous cherchons, d'après les hypothèses, une matrice L telle que $X' = LX$:
• Le déplacement d'un repère par rapport à l'autre ayant lieu parallèlement à $(0x)$, les coordonnées en y et z ne changent pas et n 'interviennent pas non plus dans les coordonnées de x' et t'. Finalement, le changement de repère est de la forme :
$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_3x + a_4t \end{cases}$$
• Examinons les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$:
$0 = a_1x + a_2t \Rightarrow dx/dt = v = -a_2/a_1$ ie $a_2 = -va_1$
• un rayon lumineux se déplace à c dans les deux repères, donc $c = dx/dt = dx'/dt' = (a_1dx + a_2dt)/(a_2dx + a_4dt)$ ie $c = (a_1c + a_2)/(a_3c + a_4)$ et donc
$a_3c^2 + (a_4 - a_1)c - a_2 = 0$
• dans cette relation, si nous changeons de sens par rapport à $(0x)$, par isotropie de l'espace, on a comme relation $a_3c^2 - (a_4 - a_1)c - a_2 = 0$ ie $a_4 = a_1$ ie
$a_3 = -va_1/c^2$
On obtient donc comme relations $\begin{cases} x' = a_1(x - vt) \\ t' = a_1(t - vx/c^2) \end{cases}$
• Si l'on change v en $-v$ les relations précédentes deviennent $\begin{cases} x' = a_1(x + vt) \\ t' = a_1(t + vx/c^2) \end{cases}$
• On écrit enfin l'équation d'un rayon lumineux émis de O en $t = 0$ le long de $(0x)$. Dans le repère $\mathcal{R}$, $x = ct = a_1(x' + vt')$ et $x' = ct' = a_1(x - vt)$. En multipliant les deux équations, il vient $a_1 = \gamma$ et nous obtenons bien les formules de Lorentz.

XXVIII. Matrice d'inertie d'un solide.

1°. La tige n'a que deux dimensions donc $D = E = F = 0$ (par symétrie). Par symétrie également, $A = B = C/2 + C'$ et la matrice d'inertie est donc de la forme $\mathcal{I}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec
$A = \int z^2\ dm = \lambda\int z^2dz = \lambda\int_{-l}^{l} z^2dz = 2\lambda z^3/3$ λ étant la densité linéique de masse. On a donc $A = \frac{1}{3}ml^2$ de sorte que $\mathcal{I}_0 = \frac{1}{3}ml^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On en déduit alors le moment d'inertie par rapport à Δ :
$$I_\Delta = \vec{n}\mathcal{I}_0\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{16}$$

2°. $(Oz) = \Delta$ est l'axe du disque, donc, par symétrie, $A = B = C/2 + C'$ ie $\mathcal{I}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ et
$C' = \int z^2\ dm = 0$, $C = \int r^2\ dm = \int(x^2 + y^2)dm$ On découpe le disque en tranches élémentaires d'épaisseur dr : $dm = \rho(\pi(r + dr)^2 - \pi r^2) = 2\pi r dr$. Ainsi,
$C = \int_0^R 2\pi\rho r^3dr = \frac{1}{3}\pi\rho R^4 = \frac{1}{2}mR^2$ et $A = B = \frac{1}{4}mR^2$.
On a donc $\mathcal{I}_0 = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Comme $(Ox), (Oy), (Oz)$ sont axes de symétrie on a $3A = A + B + C = \int(y^2 + z^2)dm + ... + \int(x^2 + y^2)dm = 2\int(x^2 + y^2 + z^2)dm$ $A = \frac{2}{3}\int r^2\ dm$.
On découpe la sphère en tranches de couronnes sphériques :
$dm = \rho(\frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3) = \rho 4\pi r^2dr$
$A = \frac{2}{3}\rho 4\pi\int_0^R r^4dr = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$ $A = \frac{1}{5}mR^2$ et
$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{5}mR^2 \times Id$

XXIX. Informatique quantique.

1°. $X\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ et $Z\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$
$Y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\beta\\ i\alpha\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$
$S\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ i\beta\end{pmatrix}$

2°. $det(X)=-1\neq 0$ donc X est réversible. $det(Z)=-1$ donc Z est inversible. Idem pour Y, H et S.

3°. X, Z et H sont des matrices réelles, donc égales à leur conjugée. Après calculs, X, Z, Y, H sont hermitiennes, mais pas S

4°. En effectuant le produit matriciel, on a
$C|00>=|00>$, $C|01>=|01>$, $C|10>=|11>$,
$C|11>=|10>$ et pour un état $\psi=\begin{pmatrix}\alpha_{00}+\alpha_{01}\\ \alpha_{10}+\alpha_{11}\\ \alpha_{00}+\alpha_{10}\\ \alpha_{01}+\alpha_{11}\end{pmatrix}$,
$C\psi=\begin{pmatrix}\alpha_{00}+\alpha_{01}\\ \alpha_{10}+\alpha_{11}\\ \alpha_{01}+\alpha_{10}\\ \alpha_{11}+\alpha_{10}\end{pmatrix}$

5°. C'est tout simplement $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

6°. Pour $|00>$, l'état de Bell est comme ci-dessus
$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00>+|11>)$