MATHEMATIQUES TD SOUTIEN - FICHE 3 : CALCULS AVEC LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES.

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007

Voici quelques exercices pour réviser les techniques de calculs avec les logarithmes et les exponentielles.

Résumé des formules à connaitre.

On définit la fonction exponentielle exp comme étant une fonction égale à sa dérivée vérifiant $\exp(0) = 1$
exp est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$
On note e le réel $\exp(1)$ et les propriétés de l'exponentielle permettent alors d'écrire $\exp(x) = e^x$

Théorème 1
$\forall x, y \in \mathbb{R}$:
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = e^x / e^y$
- $e^{-x} = 1/e^x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x / x^n = +\infty$

La fonction logarithme népérien ln est la réciproque de exp et est donc définie de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'on a
$\boxed{y = \ln x \iff x = e^y}$
Ses propriétés se déduisent de celles de l'exponentielle.

Théorème 2
$\forall x, y > 0$:
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\ln(1/x) = -\ln x$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha / \ln x = +\infty$ *avec* $\alpha > 0$

I. Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$

1°. $\ln 12$	2°. $\ln 18$	3°. $\ln 96$
4°. $\ln 15$	5°. $\ln 24$	6°. $\ln 120$
7°. $\ln 432$	8°. $\ln \dfrac{128}{243}$	9°. $\ln \dfrac{192}{108}$

10°. $\ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3})$
11°. $\ln \sqrt{125}$

II. Simplifier

1°. $\ln(e^2)$	2°. $\ln(\sqrt{e})$
3°. $\ln(1/e)$	4°. $2\ln(e^3)$
5°. $\ln(1/\sqrt{e})$	6°. $\ln(e^2) + \ln(1/e^4)$
7°. $e^{2+\ln 4}$	8°. $e^{3\ln x}$
9°. $\ln(1/e^x)$	10°. $\ln\sqrt{e^x}$
11°. $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}}$	12°. $\dfrac{1}{e^{4x}}$
13°. $(e^{-2x})^4$	14°. $e^{3x}e^{5x}$

III. Résoudre

1°. $\ln(3 + x) = \ln 3 + \ln x$
2°. $\ln(3x) = 3\ln x$
3°. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln(x + 10)$
4°. $\ln 5 - \ln x = \ln x - \ln 2$
5°. $\ln(2x) + \ln(8x) = 4$
6°. $(\ln x)^2 + 4\ln x + 3 = 0$
7°. $\ln(x + 2) = \ln(5 - x)$
8°. $\ln(1 - x^2) = \ln(1 - x)$
9°. $\ln(x + 3) = 0$
10°. $\ln(2x - 1) = \ln(4 - x)$
11°. $\ln(-2x^2 + 5x + 3) = \ln(4x^2 - 1)$
12°. $(x - 1)\ln(x - 2) = 0$
13°. $\ln(2x - 5) = \ln 3 - \ln x$
14°. $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$
15°. $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x - 1)$
16°. $\ln(x - 4) + \ln(2x) = \ln 4$
17°. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(x + 5)$
18°. $\ln(2x^2 - 5x + 1) = (\ln 16)/2$
19°. $\ln x + \ln(x - 1) = 2\ln(x - 2)$
20°. $\ln\sqrt{x} = \ln(2x + 1)$
21°. $\ln\sqrt{2x - 3} + \ln\sqrt{x} = \ln(6 - x)$
22°. $2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$
23°. $\ln(2x + 3) + \ln(x^2 + 2x + 2) = \ln(8x + 9)$
24°. $8(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + \ln x = 0$

IV. Résoudre

1°. $3^{2x} = 2^{3x}$
2°. $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$
3°. $10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0$
4°. $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$
5°. $\ln(\ln(e^x) + e^{-\ln x}) = 1 - \ln x$
6°. $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$
7°. $\begin{cases} \log_x(e) + \log_y(e) = 7/3 \\ \ln(xy) = 7/2 \end{cases}$
8°. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$