PROBABILITÉS - FORMULAIRE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2011/2012

Définition — Opérations sur les ensembles.

- $A \cup B = \{x \in \Omega / \ x \in A \ ou \ x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \in \Omega / \ x \in A \ et \ x \in B\}$
- $\bar{A}^{\Omega} = \{x \in \Omega / \ x \notin A\}$

Définition — Partition.

Une famille non vide $A_1, A_2, ..., A_n$ de sous ensembles de Ω est une **partition** de Ω si:

- les A_i sont deux à deux disjoints: $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
- leur réunion forme Ω: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Propriété — Lois de De Morgan.

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propriété — Cardinal.

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$
- $\text{Card } \Omega = n \Rightarrow \text{Card } \mathfrak{P}(\Omega) = 2^n$

Théorème — Principe Multiplicatif.

Si $\text{Card } \Omega = n$:

- Nombre de p-listes: n^p
- Nombre de p-arrangements: $A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$
- Nombre de permutations: $n!$
- Nombre de combinaisons à p éléments: $C_n^p = A_n^p / p\,!$

Propriété

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \qquad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Théorème — Symétrie des C_n^p

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad \forall \, 0 \leq p \leq n$$

Théorème — Triangle de Pascal.

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p \quad \forall \, 0 \leq p < n$$

Théorème — Formule du binôme de Newton.

$$\forall \, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Description de l'expérience	Vocabulaire ensembliste
Expérience aléatoire	Ensemble Ω
Eventualité	Elément $\omega \in \Omega$
Evènement	Sous ensemble $A \subset \Omega$
Evènement contraire de A	Complémentaire $\bar{A}^{\Omega}$
Evènement A et B	$A \cap B$
Evènement A ou B	$A \cup B$
Evènement impossible	$\emptyset$
Evènement certain	Ω

Définition — Axiomes de Kolmogorov.

Une probabilité sur un ensemble Ω est une fonction $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ vérifiant:
$A \longmapsto \mathbb{P}(A)$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Propriété

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Dans le cas d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Définition — Probabilité conditionnelle.

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propriété

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)$

Propriété Formule des probabilités totales.

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω et $B \subset \Omega$.

$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)$

Cette formule permet de décomposer l'information sur la réalisation d'un évènement B en fonction de l'influence que des évènements $A_1, ..., A_n$ ont sur B.

Propriété Formule de Thomas Bayes.

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω, alors $\forall B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}$$

Cette formule s'appelle aussi formule des causes: on sait qu'un évènement B peut se réaliser grâce à l'un des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$. On s'aperçoit que B s'est réalisé. La formule permet alors de savoir quelle en est la cause, c-à-d. parmi les évènements $A_1, ..., A_n$, quel est celui qui a provoqué la réalisation de B.

Définition

On dit que deux évènements A etB sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Propriété

A etB indépendants

$\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

$\iff \mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$

$\iff \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$

Définition

On dit que trois évènements sont indépendants **dans leur ensemble** si

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & (1) \\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) & (2) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) & (3) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & (4) \end{cases}$$

⚠ ATTENTION

Disjoints et indépendants sont deux notions différentes.

A et B disjoint $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

A et B indépendants $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Propriété

Soient A et B deux évènements indépendants. Alors les évènements suivants sont indépendants:

- $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- A et $\bar{B}$.
- $\bar{A}$ et B.
- $f(A)$ et $g(B)$ quelques soient les fonctions f et g.