MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage

- 2008/2009 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 3 points.

1°. Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent trois caractères $\sharp$ mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes différents ?

Les 5 caractères se choisissent de 127^5 façons. La place des trois $\sharp$ se choisit de $C_8^3 = 56$ façons, soit au total : $C_8^3 \times 127^5$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. La clef secrète utilisée dans l'algorithme AES fait 256 bits. Combien existe-t-il de clefs possibles ?

Chaque bit peut prendre 2 valeurs. On a donc au total 2^{256} clefs possibles $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Une baie de brassage contient 50 prises RJ45. Combien de connexions différentes peut-on former avec toutes ces prises ?

Une connexion correspond évidemment à la liaison entre deux prises distinctes. Il y a donc au total $C_{50}^2 = 1225$ connexions possibles ! $\boxed{\text{1 point}}$

II. 5 points.

1°. D'après l'énoncé, on directement :
$\mathbb{P}(N/U_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(N/U_2) = 1/2$
$\mathbb{P}(B/U_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(B/U_2) = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. D'après la formule des probas totales :
$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(N/U_2)\mathbb{P}(U_2)$
$= 1/4 \times 1/3 + 1/2 \times 2/3 = 5/12$ $\boxed{\text{1 point}}$

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(U_1/N) = \frac{\mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{1/4 \times 1/3}{5/12} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Les évènements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

$\mathbb{P}(N/U_1) \neq \mathbb{P}(N)$ ils ne sont donc pas indépendants.
$\mathbb{P}(N \cap U_1) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Par indépendance des tirages, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 5/12$. Ainsi, $\mathbb{E}[X] = 12/5$, $\mathbb{P}[X = 1] = p = \frac{5}{12}$ et $\mathbb{P}[X = 2] = q \times p = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

$\boxed{\text{1 point}}$

III. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	0	1	TOT
0	0	1/3	1/3
1	1/3	1/3	2/3
TOT	1/3	2/3	1

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.

$\mathbb{P}[X = 0] = 1/3$, $\mathbb{P}[X = 1] = 2/3$, $\mathbb{E}[X] = 2/3$, $\mathbb{E}[X^2] = 2/3$ et $\text{var}(X) = 2/9$
Idem pour Y qui a la même loi $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{E}[XY] = 1/3$ donc $\text{cov}(X, Y) = 1/3 - (2/3)^2 = -1/9 \neq 0$ et par suite X et Y ne sont pas indépendantes $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.

$S \backslash T$	0	1	TOT
0	2/3	0	2/3
1	0	1/3	1/3
TOT	2/3	1/3	1

Pour construire rapidement le tableau, il suffit de constater que $\mathbb{P}[S = 0, T = 0] = \mathbb{P}[X = 1, Y = 1]$. Le reste du tableau s'en déduit facilement $\boxed{\text{1 point}}$

4°. S et T sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{P}[S = 0, T = 0] \neq \mathbb{P}[S = 0] \times \mathbb{P}[T = 0]$ et par suite S et T ne sont pas indépendantes. $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 5 points.

On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	1/3	1/3	1/3

1°. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$, $\sigma(X)$ et tracer la fonction de répartition F de X.

$\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = 2/3$ et $\text{var}(X) = 2/3$ et la fonction de répartition possède 4 paliers de hauteur 0, 1/3, 2/3 et 1 $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y, ainsi que $\mathbb{E}[Y]$, $var(Y)$ et $\sigma(Y)$.

k	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	1/3	2/3

$\mathbb{E}[Y] = 2/3$, $\mathbb{E}[Y^2] = 2/3$ et $\text{var}(Y) = 2/9$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer, à l'aide d'un tableau, la loi du couple (X, Y) et calculer $\text{cov}(X, Y)$.

$Y \backslash X$	-1	0	1	TOT
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	2/3
TOT	1/3	1/3	1/3	1

$\text{cov}(X, Y) = -1/3 + 1/3 = 0$ et pourtant il est clair que ces variables ne sont pas indépendantes ! $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Déterminer la loi de $X/[Y = 0]$, celle de $X/[Y = 1]$, puis celle de $Y/[X = 0]$ et $Y/[X = 1]$. Le caractère / signifie "sachant que".

On a $\mathbb{P}[X=0/Y=0] = \dfrac{\mathbb{P}[X=0;Y=0]}{\mathbb{P}[Y=0]} = \dfrac{1/3}{1/3}$

Après plusieurs calculs du même type, on obtient les tableaux suivants, qui donnent les lois conditionnelles voulues :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X=k/Y=0]$	0	1	0

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X=k/Y=1]$	$1/2$	0	$1/2$

k	0	1
$\mathbb{P}[Y=k/X=0]$	1	0

k	0	1
$\mathbb{P}[Y=k/X=1]$	0	1

k	0	1
$\mathbb{P}[Y=k/X=-1]$	0	1

$\boxed{\text{2 points}}$

V. 3 points.

On considère un composant électronique qui a une probabilité $p = 10^{-5}$ d'être défectueux. On étudie un échantillon de 100000 composants indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon.

1°. Quel est le nombre moyen de composants défectueux dans l'échantillon ?

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10^5$ et $p = 10^{-5}$ comme nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli indépendantes, chaque expérience consistant à voir si un composant est défectueux ou non. Ainsi, le nombre moyen de composants défectueux est $\mathbb{E}[X] = np = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}[X=0]$ et $\mathbb{P}[X>2]$

La loi des évènements rares s'applique car $n > 50$ et $np < 5$ et l'on peut donc approcher la loi de X par une loi de
Poisson de paramètre $\lambda = 1$. On a alors $\mathbb{P}[X=0] = e^{-1}$ et $\mathbb{P}[X>2] = 1 - \mathbb{P}[X=0] - \mathbb{P}[X=1] - \mathbb{P}[X=2] = 1 - 3e^{-1}$
$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Afin de fiabiliser les composants, on décide de les tester. Le test a une probabilité $\alpha = 0.9$ de détecter un composant sachant qu'il est défectueux et l'on effectue 3 tests indépendants sur chaque composant. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux soit commercialisé.

Là encore, le nombre Y de tests réussis suit une loi binomiale de paramètres $p = \alpha$ et $n = 3$. On a donc $\mathbb{P}[Y=0] = C_3^0 \times 0.9^0 \times 0.1^3 = 10^{-3}$ $\boxed{\text{1 point}}$