MATHEMATIQUES DS N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage

- 2008/2009 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 3 points.

1°. Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent trois caractères $\sharp$ mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes différents ?
2°. La clef secrète utilisée dans l'algorithme AES fait 256 bits. Combien existe-t-il de clefs possibles ?
3°. Une baie de brassage contient 50 prises RJ45. Combien de connexions différentes peut-on former avec toutes ces prises ?

II. 5 points.

On considère deux urnes : U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire et U_2 contient 1 boule blanche et 1 noire. On lance un dé à six faces normal. Si l'on fait 1 ou 6, on choisit une boule dans U_1. Sinon, on la choisit dans U_2. On considère les évènements suivants :

N	On a tiré une boule noire.
B	On a tiré une boule blanche.
U_1	On a choisit une boule dans l'urne U_1.
U_2	On a choisit une boule dans l'urne U_2.

1°. Expliciter $\mathbb{P}(N/U_1)$, $\mathbb{P}(N/U_2)$, $\mathbb{P}(B/U_1)$ et $\mathbb{P}(B/U_2)$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(U_1/N)$

3°. Les évènements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

4°. On effectue plusieurs tirages indépendants suivant la méthode ci-dessus, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Soit X le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule noire. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X = 2]$.

III. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	0	1	TOT
0	0	1/3	1/3
1	1/3	1/3	2/3
TOT	1/3	2/3	1

On pose également $S = XY$ et $T = \min(X, Y)$

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.
2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
3°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.
4°. S et T sont-elles indépendantes ?

IV. 5 points.

On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	1/3	1/3	1/3

1°. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$, $\sigma(X)$ et tracer la fonction de répartition F de X.

2°. Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y, ainsi que $\mathbb{E}[Y]$, $var(Y)$ et $\sigma(Y)$.

3°. Déterminer, à l'aide d'un tableau, la loi du couple (X, Y) et calculer $cov(X, Y)$.

4°. Déterminer la loi de $X/[Y = 0]$, celle de $X/[Y = 1]$, puis celle de $Y/[X = 0]$ et $Y/[X = 1]$. Le caractère / signifie "sachant que".

Indication : Il s'agit de calculer, par exemple, $\mathbb{P}([X = \epsilon]/[Y = 0])$ pour $\epsilon = -1, 0, 1$.

V. 3 points.

On considère un composant électronique qui a une probabilité $p = 10^{-5}$ d'être défectueux. On étudie un échantillon de 100000 composants indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon.

1°. Quel est le nombre moyen de composants défectueux dans l'échantillon ?
2°. Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$ et $\mathbb{P}[X > 2]$
3°. Afin de fiabiliser les composants, on décide de les tester. Le test a une probabilité $\alpha = 0.9$ de détecter un composant sachant qu'il est défectueux et l'on effectue 3 tests indépendants sur chaque composant. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux soit commercialisé.