**MATHEMATIQUES DS N°2 - Formation par apprentissage**

*R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h*

*Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.*

**I.** 3 points.

1°. Mon numéro de carte bancaire est 6641, mais les chiffres sont donnés dans le désordre. Combien devrez-vous tester de codes différents ?
2°. Un message de 8 bits contient deux erreurs. Combien existe-t-il de positions possibles pour ces deux erreurs ?
3°. La clef secrète de l'algorithme DES contient 56 bits. Un pirate essaie de trouver le code. Combien devra-t-il effectuer d'essais ?
4°. Une urne contient 5 boules rouges et 3 vertes. On en tire 4 simultanément. Combien de tirages contiendront exactement 2 rouges et 2 vertes ?

**II.** 3 points.

On considère trois urnes $U, V, W$. L'urne $U$ contient 4 boules : 3 sont notées $W$ et 1 est notée $V$. L'urne $V$ contient 2 boules noires et 4 blanches et l'urne $W$ contient 2 boules blanches et 4 noires. On tire une boule dans $U$ ; si elle est notée $V$ on en tire une seconde dans $V$, si elle est notée $W$, on tire la seconde dans $W$. On considère les évènements suivants :

| | |
|---|---|
| $N$ | On a tiré une boule noire. |
| $B$ | On a tiré une boule blanche. |
| $V$ | On a choisi une boule dans l'urne $V$. |
| $W$ | On a choisi une boule dans l'urne $W$. |

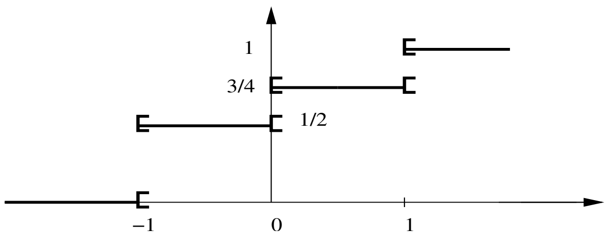
1°. Expliciter $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$, $\mathbb{P}(N/W)$ et $\mathbb{P}(B/W)$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(V/N)$

3°. Les évènements $N$ et $B$ sont-ils indépendants ? disjoints ?

**III.** 3 points.

On considère la fonction $F$ donnée par la courbe représentative ci-dessous.
Soit $X$ la variable aléatoire de fonction de répartition $F$.




1°. Déterminer la loi de $X$, $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$ et $\sigma(X)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/2]$

**IV.** 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires $(X, Y)$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

| $X \backslash Y$ | $-1$ | 1 | TOT |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 1/4 | 0 | 1/4 |
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| 1 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| TOT | 1/2 | 1/2 | 1 |

On pose également $S = 1/Y$ et $T = X^2$

1°. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$, ainsi que leur espérance et leur variance.
2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
3°. Déterminer la loi du couple $(S, T)$ sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de $S$ et $T$.
4°. $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

**V.** 7 points.

Des ordinateurs émettent des trames de façon aléatoire et indépendante, sur un même canal de communication. En cas de collision - si deux trames ou plus sont émises simultanément - celles-ci sont détruites et l'ordinateur tentera de les re-émettre plus tard. On note $\alpha$ la probabilité qu'un ordinateur émette une trame à un instant $t$ et $n$ le nombre d'ordinateurs reliés au canal.

On note $X_t$ le nombre de trames qui apparaissent à un instant $t$ sur le canal.

1°. Quel est la loi de $X_t$ ? Justifier. Quel est le nombre moyen de trames qui apparaissent à $t$ sur le canal ?

2°. Dans cette **seule** question, on pose $n = 100$ et $\alpha = 10^{-2}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $X_t$ ? Calculer alors $\mathbb{P}[X_t = 0]$.

Si $C$ est l'évènement "il y a collision à $t$", calculer $\mathbb{P}(C)$.

3°. Lorsqu'une station a déjà essayé d'émettre un message sans succès, elle tire à pile ou face à chaque instant suivant, selon une loi de Bernoulli de paramètre $p$ fixé (protocole ALOHA). Si elle fait pile, alors elle tente une nouvelle émission. Notons $N$ le nombre de tentatives nécessaires pour que la station tente une nouvelle émission.

Donner l'expression de $\mathbb{P}[N = k]$. Quelle est la loi de $N$ ? Justifier. Quel est le nombre moyen de tentatives avant que la station ne tente une nouvelle émission ?

4°. A un instant donné, on dispose donc de deux groupes de stations : celles qui ont déjà une trame en attente et qui vont essayer ou pas de l'émettre à nouveau, et celles qui n'ont pas de trames en attente. Dans ce second groupe, on suppose maintenant que le nombre de messages apparaissant à un instant $t$ sur le canal suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Exprimer par une phrase les évènement suivants et calculer leur probabilité en fonction de $\lambda$ et de $p$ :

$[X_{t+1} = k - 1/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k + 1/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k + i/X_t = k]$ avec $i \geq 2$.

$[A/B]$ signifie $A$ sachant $B$.