MATHEMATIQUES DS N°3 - Module MC4 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 1h

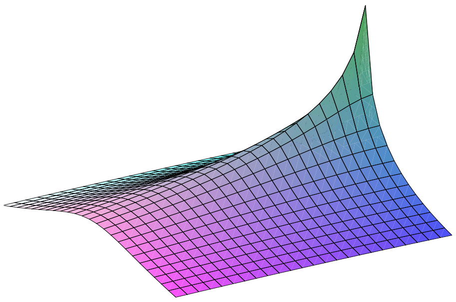
Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Soit $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

1°. Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$.

$f(x,y)$ existe ssi $x^2+y^2>0$ de sorte que seul $O(0,0)$ est exclu du domaine de définition $\boxed{\text{0.5 point}}$



2°. Calculer le gradient le laplacien de f par rapport à x et y.

La fonction étant symétrique en x et y, on a facilement : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

On en déduit que $\text{grad} f = \dfrac{2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

et $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Déterminer les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y) = 2x^2+y^2-2xy+4x$

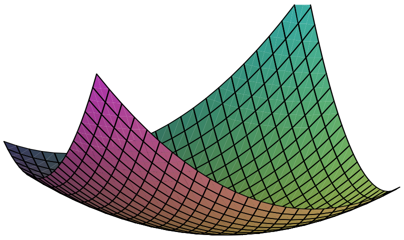
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x-2y+4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y-2x$

La seconde équation s'annule ssi $x=y$ et la première devient alors $2x+4$ qui s'annule en -2. Le seul point critique est donc $(-2,-2)$ $\boxed{\text{1 point}}$

En ce point, la matrice hessienne est :

$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont, après calcul du polynôme caractéristique, $3\pm\sqrt{5}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Comme elles sont >0, le point $(-2,-2)$ est un minimum strict $\boxed{\text{1 point}}$



III. 3 points.

1°. On a clairement $V(x,y,z) = xyz$ et $S(x,y,z) = xy+2yz+2xz$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $V(x,y,z) = xyz = 32 \Rightarrow z = \dfrac{32}{xy}$ et donc $S(x,y) = xy + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{y}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{64}{x^2} = 0 \iff x^2y = 64$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{64}{y^2} = 0 \iff y^2x = 64$

De ces deux équations on tire $x=y=4$ qui est le seul point critique. En ce point, la matrice hessienne est $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 3.

Comme elles sont >0, il s'agit bien d'un minimum et les dimensions de la boite sont donc $x=y=4$ et $z=2$ $\boxed{\text{2 points}}$.

IV. 5 points.

On considère l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$ $(\star)$ pour une fonction $f(x,y)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On pose également $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ et $g(u,v) = f(x,y)$

1°. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v}$

Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u}$

$\boxed{\text{2 points}}$

2°. En déduire que $f(x,y)$ est solution de $(\star)$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = g$

D'après ce qui précède, $\dfrac{\partial g}{\partial u} = g(u,v)$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. En intégrant cette équation, en déduire les solutions de $(\star)$

On obtient $g'(u)/g(u) = 1 \iff \ln g(u) = u + cte(v)$ $\iff g(u) = K(v)e^u \iff f(x,y) = K(x-y)e^{x+y}$

où K est une fonction quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

V. 6 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $I = \int\int_D \sin x \; dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/ \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; x+y \leq \pi\}$

Le domaine d'intégration est le triangle de sommet $(0,0), (\pi,0), (0,\pi)$

$I = \int_0^{\pi} \sin x \int_0^{\pi - x} dydx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx$ Par intégration par parties, il vient :
$I = [-(\pi - x)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$
avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2+y^2 \leq 1; \; x \geq 0; \; y \geq 0\}$

On effectue un changement de variables en coordonnées polaires :
$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln 2}{4}$
$\boxed{\text{2 points}}$

3°. Calculer de même $\int\int_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$
avec $\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2+y^2 \leq n^2\}$
En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$I_n = \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} edrd\theta = -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^n \times 2\pi$
$= \pi(1 - e^{-n^2})$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par ailleurs,
$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \lim_{n \to +\infty} I_n = \pi$
Comme $I = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\boxed{\text{1 point}}$