MATHEMATIQUES DS N°3 - Module MC4

R&T Saint-Malo - 2nde année - 31/03/09 - Année scolaire 2008/2009 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Soit $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

1°. Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$.
2°. Calculer le gradient et le laplacien de f par rapport à x et y.

II. 4 points.

Déterminer les extrema de la fonction ci-dessous :

$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$

III. 3 points.

Une boite rectangulaire a pour longueur, largeur et hauteur respectivement x, y et z cm. Cette boite n'a pas de couvercle sur le dessus. Son volume est de 32 cm^3 et l'on souhaite déterminer x, y, z de telle sorte que la surface de la boite soit minimale.

1°. Calculer le volume et la surface de la boite en fonction de x, y et z.
2°. En déduire z en fonction de x et y puis exprimer la surface $S(x,y)$ uniquement en fonction de x et y.
3°. Calculer les extrema de $S(x,y)$ et en déduire la solution du problème.

IV. 5 points.

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2f \ (\star)$$

pour une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose également $\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array} \right.$ et $g(u,v) = f(x,y)$

1°. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$
2°. En déduire que $f(x,y)$ est solution de $(\star)$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = g$
3°. En intégrant cette équation, en déduire les solutions de $(\star)$

V. 6 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $\displaystyle\int\int_D \sin x \ dxdy$ avec $D = \{(x,y)/ \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ x + y \leq \pi\}$

2°. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$
avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x \geq 0; \ y \geq 0\}$

3°. Calculer de même $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$
avec $\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq n^2\}$
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$