MATHEMATIQUES DS N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 1 point.

Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent deux % mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes ?

II. 5 points.

On considère deux urnes : U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire et U_2 contient 1 boule blanche et 1 noire. On lance un dé à six faces normal. Si l'on fait 1 ou 6, on choisit une boule dans U_1. Sinon, on la choisit dans U_2. On considère les évènements suivants :

N	On a tiré une boule noire.
B	On a tiré une boule blanche.
U_1	On a choisit une boule dans l'urne U_1.
U_2	On a choisit une boule dans l'urne U_2.

1°. Expliciter $\mathbb{P}(N/U_1)$, $\mathbb{P}(N/U_2)$, $\mathbb{P}(B/U_1)$ et $\mathbb{P}(B/U_2)$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(U_1/N)$

3°. Les évènements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

4°. On effectue plusieurs tirages indépendants suivant la méthode ci-dessus, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Soit X le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule noire. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X = 2]$.

III. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X\backslash Y$	0	1	TOT
0	0	1/3	1/3
1	1/3	1/3	2/3
TOT	1/3	2/3	1

On pose également $S = XY$ et $T = \min(X, Y)$

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.
2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
3°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.
4°. S et T sont-elles indépendantes ?

IV. 4 points.

Soit X une variable aléatoire qui peut prendre comme valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$. L'entropie de X est la quantité :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \log_2(\mathbb{P}[X = x_k]) \times \mathbb{P}[X = x_k]$$

$H(X)$ mesure l'incertitude sur les valeurs que peut prendre X.

1°. Démontrer que $H(X) \geq 0$
2°. Calculer $H(X)$ si X suit une loi équiprobable sur $\{1, 2, ..., n\}$
3°. Calculer $H(X)$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ avec $\mathbb{P}[X = 1] = p$ et $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$
4°. Calculer $H(X)$ lorsque $p = 1/2$ dans la question précédente et expliquer le résultat obtenu.

V. 6 points.

Des données binaires indépendantes sont transmises sur un canal radio. La probabilité d'erreur par bit est $p = 2 \times 10^{-6}$. On transmet une communication composée de $n = 10^7$ bits sur ce canal et l'on note X le nombre d'erreurs durant la transmission.

1°. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{var}(X)$.

2°. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}[X \geq 15]$, $\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22]$.

3°. On améliore la transmission afin d'obtenir $p = 10^{-7}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X = 4]$.

4°. Lorsque de nombreux obstacles dispersent le signal radio, le modèle de canal habituellement utilisé est le canal à évanouissement de Rayleigh (Rayleigh fading channel). Dans ce cas, l'enveloppe du signal est une variable aléatoire Y de densité

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

Démontrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité et calculer $\mathbb{P}[Y \geq 1]$