MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 14/10/09

Soient u et v les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1°. Rappeler les définitions rigoureuses de valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre.

Un réel λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\vec{X}$ tel que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$. $\vec{X}$ est alors un vecteur propre associé à λ. Le sous-espace propre associé à λ est $\ker(A - \lambda Id)$. Il est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres associés à λ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

Le polynôme caractéristique de A est $P(X) = -X(2 - X)^2$. 0 est valeur propre simple et 2 valeur propre double. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Démontrer que A est diagonalisable et préciser la forme diagonale, ainsi que la matrice de passage vers une base de vecteurs propres.

Le sous-espace propre associé à 0 est $E_0 = \ker u$. Il est de dimension 1 engendré par le vecteur $\vec{\alpha}(1, 0, 1)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Le sous-espace propre associé à 2 est $E_2 = \ker(u - 2Id)$. Il est de dimension 2 engendré par les vecteurs $\vec{\beta}(1, 1, 0)$ et $\vec{\gamma}(1, -1, 1)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Comme $\dim E_0 + \dim E_2 = 3$, la matrice est diagonalisable et dans la base $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha})$ la matrice de u est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

4°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

Le polynôme caractéristique de B est $P(X) = -X(2 - X)^2$. 0 est valeur propre simple et 2 valeur propre double. A et B ont donc mêmes valeurs propres $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Démontrer que B n'est pas diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à 0 pour B est $E'_0 = \ker v$. Il est de dimension 1 engendré par le vecteur $\vec{\alpha}(1, 0, 1)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Le sous-espace propre associé à 2 pour B est $E'_2 = \ker(u - 2Id)$. Il est de dimension 1 engendré par le vecteur $\vec{\beta}(1, 1, 0)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Comme $\dim E_0 + \dim E_2 = 2 < 3$, la matrice B n'est diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

6°. On considère maintenant la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = -1 \neq 0$ et la matrice P est donc inversible. Après calculs, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

7°. Déterminer la matrice de v dans la base définie par les colonnes de P.

Après calculs, on trouve $T = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{1 point}}$

On peut également constater que deux des vecteurs colonnes de P sont vecteurs propres associés à 0 et 2 et que $v(\vec{\gamma}) = 2\vec{\gamma} + \vec{\beta}$. On retrouve alors, sans calcul, le résultat ci-dessus.

8°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

De $D = P^{-1}AP$, on tire $A = PDP^{-1}$ et par suite, $A^n = PD^nP^{-1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Après calcul, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^{n+1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & -2^n & -2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1}A \boxed{\text{1.5 points}}$$

9°. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Si nous posons $\vec{X}(x, y, z)$ alors $\vec{X}(x, y, z)$ solution du système ssi $X' = AX$. Nous effectuons alors un changement de base vers la base de vecteurs propres. Posons pour ce faire $\vec{Y} = P^{-1}\vec{X} = (u, v, w)$

$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY \iff Y' = DY$

Le système est alors sous forme diagonale :

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = 2v(t) \\ w'(t) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ces équations différentielles sont $u(t) = k_1e^{2t}$, $v(t) = k_2e^{2t}$, $w(t) = k_3$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

En repassant dans la base initiale, nous obtenons $\vec{X} = P\vec{Y}$ dont les coordonnées sont

$$\begin{cases} x(t) = k_1e^{2t} + k_2e^{2t} + k_3 \\ y(t) = k_1e^{2t} - k_2e^{2t} \\ z(t) = k_1e^{2t} + k_2e^{2t} + k_3 \end{cases} \boxed{\text{2 points}}$$

Parmi les solutions, quelles sont celles qui vérifient $x(0) = y(0) = z(0) = 1$?

En remplaçant t par 0 dans les équations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle : $P\vec{K} = \vec{U}$ avec $\vec{K}(k_1, k_2, k_3)$ et $\vec{U}(1, 1, 1)$.

La solution est $\vec{K} = P^{-1}\vec{U} = (0, -1, 2)$ et $\boxed{\text{la}}$ solution du système avec condition initiale est :

$$\begin{cases} x(t) = -e^{2t} + 2 \\ y(t) = e^{2t} \\ z(t) = -e^{2t} + 2 \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}$$