MATHEMATIQUES DS N°1 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 15 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$P(x) = \det(A - xI) = (1-x)^2(2-x)$ $Sp(A) = \{2, 1\}$
$\boxed{\text{1 point}}$

Un vecteur $\vec{X}(x, y, z)$ appartien à E_2 ssi $x = y = -z$. De même, un tel vecteur appartient à E_1 ssi $x - y + z = 0$. On peut donc écrire :

$E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1.5 points}}$

$E_1 = \text{vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 2

$\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. A est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2 + \dim E_1 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ et la matrice est donc diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Sa forme diagonale dans la base précédente (les vecteurs propres étant placés dans l'ordre où ils apparaissent dans le corrigé) est donnée par $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère maintenant la matrice
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = -1 \neq 0$ donc P est diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Après calculs, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $A = PDP^{-1}$, donc que $A^n = PD^nP^{-1}$
$\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & 2^n - 1 & -2^n + 1 \\ -2^n + 1 & 2^n & -2^n + 1 \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 2^n \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

5°. Posons $X = (x, y, z)$. Alors le système s'écrit de façon matricielle sous la forme $X' = AX$. Posons $Y = (u, v, w) = P^{-1}X$. En passant dans la base de vecteurs propres, le système devient $Y' = DY$. On intègre alors les équations différentielles obtenues :

$Y = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^t \\ k_3 e^t \end{pmatrix}$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Pour obtenir la solution du système, il suffit de revenir à la base canonique en effectuant le produit $X = PY$; on obtient :

$X = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} + k_2 e^t \\ k_1 e^2 t + 2k_2 e^t + k_3 e^t \\ -k_1 e^{2t} + k_2 e^t + k_3 e^t \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Si $x(0) = y(0) = z(0)$ alors le vecteur $k = (k_1, k_2, k_3)$ est solution du système
$k = P \times (1, 1, 1) \iff k = P^{-1} \times (1, 1, 1) = (-1, 2, -2)$
$\boxed{\text{1 point}}$

II. 5 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

En procédant de la même façon que dans l'exercice précédent, on trouve $P(x) = -(x-3)(x-1)^2$ $\boxed{\text{1 point}}$
Les valeurs propres sont donc 3 et 1.

Un vecteur $\vec{X}(x, y, z)$ appartien à E_1 ssi $x = y = z$. De même, un tel vecteur appartient à E_3 ssi $x = -z$ et $y = 0$. On peut donc écrire :

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

$E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

2°. B est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2 + \dim E_1 = 2$ et la matrice n'est donc pas diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $v(\vec{\alpha}) = 3\vec{\alpha}$ puisque $\vec{\alpha}$ est vecteur propre associé à 3. De même, $v(\vec{\beta}) = \vec{\beta}$ puisque $\vec{\beta}$ est vecteur propre associé à 1.

4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.

On choisit comme deux premiers vecteurs de base $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$. Comme troisième, on peut prendre n'importe quel vecteur, par exemple le vecteur $\vec{j} + \vec{k}$ pour lequel $v(\vec{j} + \vec{k}) = \vec{\beta} + \vec{j} + \vec{k}$.

Dans la base $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{j} + \vec{k}\}$ la matrice sera

$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$