MATHEMATIQUES DS N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 15 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. A est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa forme diagonale.
3°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Parmi les solutions, quelles sont celles qui vérifient $x(0) = y(0) = z(0) = 1$?

II. 5 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. B est-elle diagonalisable ?
3°. On pose $\vec{\alpha} = \vec{k} - \vec{i}$ et $\vec{\beta} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
Déterminer $v(\vec{\alpha})$ et $v(\vec{\beta})$
4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.