MATHEMATIQUES DS N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. A est-elle diagonalisable ?
3°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$

avec $x(t), y(t), z(t)$ fonctions de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$

Parmi les solutions, déterminer celle qui vérifie $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

II. 6 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. B est-elle diagonalisable ?
3°. Déterminer $v(\vec{j})$, $v(\vec{i}+\vec{j})$ et $v(\vec{j}+\vec{k})$
4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.

III. 3 points.
On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui sont combinaison linéaire de sin et cos. Nous noterons :
$\mathcal{E} = \{u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont vous déterminerez une base et la dimension.
2°. Soit d la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à une fonction $u(x)$ associe sa dérivée $u'(x)$. Démontrer que d est linéaire et déterminer sa matrice D dans la base canonique de $\mathcal{E}$.
3°. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$. Expliquez le résultat.