MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 18 juin 2009 - Année Scolaire 2008/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 9 points.

Calculer les déterminants suivants :

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

On le voit en utilisant la règle de Sarrus (horrible) ou bien remplaçant L_3 par $L_3 - L_1 - L_2$ (ce qui fait apparaitre un zéro), puis en développant par rapport à la dernière ligne. $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times 2 = 12$

Car c'est un déterminant triangulaire $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14$

En permutant les colonnes 1 et 3, on se ramène à un déterminant triangulaire. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

en ajoutant la dernière colonne aux deux précédentes. On développe alors par rapport à la première ligne :

$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\boxed{\text{2.5 points}}$

5°. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 60$

On développe par rapport à la première colonne qui contient deux zéros, puis les deux déterminants 3×3 obtenus se développent également chacun. On peut aussi factoriser le déterminant par 2, 5 et 2 pour faciliter les calculs. $\boxed{\text{2.5 points}}$

II. 7 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1°. Pour quelles valeurs de α, la matrice A est-elle inversible ?

$\det(A) = 1 - \alpha^2$ qui est nul ssi $\alpha = \pm 1$. Donc si α est différent de ces deux valeurs, la matrice est inversible. $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer alors l'inverse de A en fonction de α

La matrice des cofacteurs est $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha^2 \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et par suite, $A^{-1} = \dfrac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x + \alpha y = -3 \\ y - z = 4 \\ \alpha x + z = 7 \end{cases}$ et discuter du nombre de solutions selon la valeur de α.

On voit que résoudre ce système revient à déterminer $X = {}^t(x, y, z)$ tel que $AX = B$ avec $B = {}^t(-3, 4, 7)$. La solution du système est donc $X = A^{-1}B$ lorsque A est inversible.

En ce cas, on a

$$x = \frac{-3 - 11\alpha}{1 - \alpha^2},\ y = \frac{3\alpha - 11}{1 - \alpha^2},\ z = \frac{4\alpha^2 + 3\alpha + 7}{1 - \alpha^2}$$

$\boxed{\text{2 points}}$

Lorsque α vaut 1 le système n'a pas de solution et lorsque α vaut -1 il en a une infinité. $\boxed{\text{2 points}}$

III. 7 points.

1° On a $\det P = 1$ et P est donc inversible. Après calcul, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. Après calcul, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$ et donc $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. On a facilement $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{0.5 point}}$ et la question précédente montre que $A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 1-(-2)^n & (-2)^n - 1 \\ 0 & 1 & (-2)^n - 1 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

On peut remarquer que cette matrice est nécessairement triangulaire afin de diminuer le nombre de calculs à faire.