MATHEMATIQUES DS N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 03/06/09 - 2008/2009 -

Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

Première partie : Transformation de Fourier.

I. 5 points.

Nous avons fait cet exercice en cours et en TD au moins cent cinquante fois. Se reporter au cours pour le corrigé.
1°. $\boxed{\text{2 points}}$ pour $\hat{\pi}(u)$ et $\boxed{\text{1 point}}$ pour $\hat{f}(u)$.

2°. On trouve π $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On trouve π $\boxed{\text{1 point}}$

II. 6 points.

Soit $\epsilon > 0$ fixé et soit
$f_\epsilon(t) = \frac{t}{\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t) + \mathbb{1}_{]\epsilon,+\infty[}(t) - \mathbb{1}_{]-\infty,-\epsilon[}(t)$

Nous noterons $H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ la fonction de Heaviside.

1°. $f_\epsilon(t)$ vaut -1 sur $]-\infty,-\epsilon[$, 1 sur $]\epsilon,+\infty[$ et forme une droite entre $-\epsilon$ et ϵ $\boxed{\text{0.5 point}}$.
$H(t)$ est la fonction échelon $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. démontrer que $H(t) = \dfrac{1+\text{sign}(t)}{2}$

C'est évident ! $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. $f'_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$
et donc $\widehat{f'_\epsilon}(u) = \dfrac{\sin(2\pi u\epsilon)}{\pi u\epsilon}$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\widehat{f_\epsilon}(u) = \dfrac{1}{2\pi i u}\dfrac{\sin(2\pi u\epsilon)}{\pi u\epsilon}$ $\boxed{\text{1 point}}$

6°. En calculant la limite quand ϵ tend vers 0 dans l'expression précédente (à l'aide de la règle de l'Hospital), on $\widehat{\text{sign}}(u) = \dfrac{1}{\pi i u}$ $\boxed{\text{1 point}}$

7°. $\widehat{\delta}(u) = 1$ au sens des distributions. Par transformation inverse, on a donc $\widehat{\mathbb{1}} = \delta(u)$. Par suite, d'après la question 3°, $\widehat{H}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\delta(u) + \dfrac{1}{\pi i u}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Seconde partie : Calcul matriciel.

III. 5 points.

1°. On voit que $PP^{-1} = I$ en effectuant le produit $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $A^n = PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}....PBP^{-1} = PB^nP^{-1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 5 points.

1°. Démontrer que toute matrice M peut s'écrire sous la forme $M = aI + bJ$ où I et J sont des matrices que l'on déterminera.

C'est évident avec I matrice identité de taille 2 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $I^2 = J^2 = I$, $IJ = JI = J$ $\boxed{\text{1 point}}$ et donc
$MM' = (aa' + bb')I + (ab' + ba')J$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. Déterminer a' et b' pour que M' soit l'inverse de la matrice M. A quelle condition sur a et b M est-elle inversible ?

De $MM' = I$, on tire $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$
$\boxed{\text{1 point}}$ et M est inversible ssi $a \neq \pm b$

4°. $PP^{-1} = 2I$ d'où le résultat $\boxed{\text{1 point}}$ et
$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$