MATHEMATIQUES DS N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 2h

I. Calculer

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1-4) = -10$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{vmatrix} = 7 \times 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 84 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 84 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -84 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 756$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $\det A = 1 \neq 0$ et la matrice est donc inversible $\boxed{\text{0.5 point}}$

Après calculs, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

III. $\boxed{\text{6 points}}$ Calculer :

1°. $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(\ln(1-u))^2}{-u}$

$= \lim_{u\to 0} \frac{(-u+o(u))^2}{-u} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/6 - x - x^3/3}{x^3} = -1/2$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sqrt{1+x} - x(e^x-1)}{(\ln(1+x))^4} = -\frac{7}{24}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$x^2\sqrt{1+x} = x^2 + x^3/2 - x^4/8 + o(x^4)$

$x(e^x-1) = x^2 + x^3/2 + x^4/6 + o(x^4)$

$(\ln(1+x))^4 = x^4 + o(x^4)$

Ainsi, $\frac{x^2\sqrt{1+x} - x(e^x-1)}{(\ln(1+x))^4} = -\frac{7}{24} + o(1)$

4°. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \right) = 1/2$

$\boxed{\text{2 points}}$

Celui-ci est un peu plus calculatoire :

On commence bien sûr par poser $u = 1/x$.

$\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$= \frac{1}{u}\left[(1+u^2+u^3)^{1/3} - (1-u+u^2)^{1/2}\right]$

$= \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{3}(u^2+u^3) - (1 + (-u+u^2)/2 + o(u^2))\right)$

$= 1/2 + o(1)$

IV. $\boxed{\text{2 points}}$

Déterminer les branches infinies de la fonction $f(x) = e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2}$ (préciser la position relative de la courbe et des asymptotes). Posons $u = 1/x$ pour effectuer un développement limité en $+\infty$:

$f(x) = f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u}e^{-u}(1+u+u^2)^{1/2}$

$= \frac{1}{u}\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)\right] = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$

$\Delta : y = x - 1/2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et comme $\frac{3}{8x} > 0$ la courbe est au dessus de l'asymptote.

$\Delta' : y = -x + 1/2$ est asymptote oblique en $-\infty$ et comme $-\frac{3}{8x} > 0$ la courbe est au dessus de l'asymptote.

V. $\boxed{\text{3 points}}$

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales ci-dessous :

1°. $f(t) = t \times 1_{[1,+\infty[}(t)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

$$\begin{array}{r|l} H(t) & 1/p \\ H(t-1) & e^{-p}/p \\ t \times H(t-1) & e^{-p}(p+1)/p^2 \end{array}$$

2°. $g(t) = 1_{[0,1]}(t) - 1_{[1,2]}(t)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

$G(p) = \int_0^1 e^{-pt}dt - \int_1^2 e^{-pt}dt = \frac{1}{p}(1-e^{-p})^2$

VI $\boxed{\text{5 points}}$

Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+3}\right]$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})H(t)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $F(p) = \frac{1}{p^2-p+1} = \frac{1}{(p-1/2)^2+3/4}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)H(t)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $F(p) = \frac{16}{(p-2)^2(p+2)} = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta}{p-2} + \frac{\gamma}{(p-2)^2}$

Un calcul rapide donne $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 4$

Ainsi, $f(t) = (e^{-2t} - e^{2t} + 4te^{2t})H(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

VII $\boxed{\text{3 points}}$

1°. $F'(p) = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Soit $Y(p)$ la transfo de Laplace de $y(t)$. L'équation est équivalente à :

$p^2Y(p) - p + Y(p) = \frac{p}{p^2+1}$

$\iff Y(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1}$

Ainsi, d'après la question 1°, $y(t) = \cos t + \frac{t}{2}\sin t$

$\boxed{\text{2 points}}$