

MATHEMATIQUES DS N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 2h

**I. Calculer**

$$1^\circ. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = 2(-1-4) = -10 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$2^\circ. \begin{vmatrix} 12 & 6 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{vmatrix} = 7 \times 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 84 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 84 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -84 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 756 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\text{II. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ On a } \det A = 1 \neq 0 \text{ et la}$$

matrice est donc inversible 0.5 point

$$\text{Après calculs, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

III. 6 points Calculer :

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\ln(1-u))^2}{-u} \\ = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(-u + o(u))^2}{-u} = 0 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/6 - x - x^3/3}{x^3} = -1/2 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - x(e^x - 1)}{(\ln(1+x))^4} = -\frac{7}{24} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$x^2 \sqrt{1+x} = x^2 + x^3/2 - x^4/8 + o(x^4)$$

$$x(e^x - 1) = x^2 + x^3/2 + x^4/6 + o(x^4)$$

$$(\ln(1+x))^4 = x^4 + o(x^4)$$

$$\text{Ainsi, } \frac{x^2 \sqrt{1+x} - x(e^x - 1)}{(\ln(1+x))^4} = -\frac{7}{24} + o(1)$$

$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) = 1/2 \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

Celui-ci est un peu plus calculatoire :

On commence bien sûr par poser $u = 1/x$.

$$\sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{1}{u} \left[(1 + u^2 + u^3)^{1/3} - (1 - u + u^2)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{3}(u^2 + u^3) - (1 + (-u + u^2)/2 + o(u^2)) \right) \\ = 1/2 + o(1)$$

IV. 2 points

Déterminer les branches infinies de la fonction

$$f(x) = e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2}$$

(préciser la position relative de la courbe et des asymptotes). Posons $u = 1/x$ pour effectuer un développement limité en $+\infty$:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} e^{-u} (1 + u + u^2)^{1/2} \\ = \frac{1}{u} \left[1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2) \right] = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

 $\Delta : y = x - 1/2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et comme $\frac{3}{8x} > 0$ la courbe est au dessus de l'asymptote. $\Delta' : y = -x + 1/2$ est asymptote oblique en $-\infty$ et comme $-\frac{3}{8x} > 0$ la courbe est au dessus de l'asymptote.**V. 3 points**

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions causales ci-dessous :

$$1^\circ. f(t) = t \times 1_{[1,+\infty[}(t) \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

$$\begin{matrix} H(t) & \begin{vmatrix} 1/p \\ e^{-p}/p \\ e^{-p}(p+1)/p^2 \end{vmatrix} \\ H(t-1) & \\ t \times H(t-1) & \end{matrix}$$

$$2^\circ. g(t) = 1_{[0,1]}(t) - 1_{[1,2]}(t) \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

$$G(p) = \int_0^1 e^{-pt} dt - \int_1^2 e^{-pt} dt = \frac{1}{p}(1 - e^{-p})^2$$

VI 5 points

Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

$$1^\circ. F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+3} \right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})H(t) \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

$$2^\circ. F(p) = \frac{1}{p^2 - p + 1} = \frac{1}{(p-1/2)^2 + 3/4}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) H(t) \quad \boxed{1.5 \text{ points}}$$

$$3^\circ. F(p) = \frac{16}{(p-2)^2(p+2)} = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta}{p-2} + \frac{\gamma}{(p-2)^2}$$

Un calcul rapide donne $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 4$

$$\text{Ainsi, } f(t) = (e^{-2t} - e^{2t} + 4te^{2t})H(t) \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

VII 3 points

$$1^\circ. F'(p) = -\frac{2p}{(p^2+1)^2} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

2°. Soit $Y(p)$ la transfo de Laplace de $y(t)$. L'équation est équivalente à :

$$p^2 Y(p) - p + Y(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$\text{Ainsi, d'après la question } 1^\circ, y(t) = \cos t + \frac{t}{2} \sin t$$

2 points