MATHEMATIQUES DS N°3

R&T Saint-Malo - 1ère année - 24/01/08 - 2007/2008 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Calculer :

1°. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ 2°. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$ 3°. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx$ 4°. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$

5°. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ 6°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 7°. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ 8°. $\displaystyle\int_{3/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

Dans la question 7°, on pourra poser $u = \tan \dfrac{x}{2}$

Dans la question 8°, on pourra poser $u = \sqrt{1-x}$

II. 8 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°. $y' = -\dfrac{2xy}{1+x^2}$ 2°. $y'(x+3) = y+1$ 3°. $x^2y' - (2x-1)y = 0$

4°. $y' + 2y = 1$ 5°. $y' + 2y = \text{ch } x$ 6°. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{-x}$

Dans la question 5°, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation.

III. 2 points.

On s'intéresse à la propagation du courant et de la tension dans une ligne de transmission (par exemple un câble coaxial). On note C et L les capacité et inductance linéïques de la ligne. On suppose que la ligne est sans perte et l'on note $U(x)$ et $I(x)$ la valeur de la tension et de l'intensité au point d'abscisse x.

On admet que $U(x)$ et $I(x)$ sont solutions de la même équation différentielle, appelée équation des lignes, et donnée par

$$\begin{cases} U''(x) + LC\omega^2\,U(x) = 0 \\ I''(x) + LC\omega^2\,I(x) = 0 \end{cases}$$

où ω représente la pulsation du courant.
On notera également $c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

1°. Résoudre ces deux équations différentielles et en déduire $U(x)$ et de $I(x)$ en fonction de ω et c.
2°. Expliquer la forme des solutions obtenues.