MATHEMATIQUES DS N°3

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices et les questions sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. $\boxed{\text{12 points}}$ Calculer :

1°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = (\ln|x+1|)_0^1 = \ln 2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\displaystyle I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}$

Posons $\displaystyle F(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1}$

En décomposant en éléments simples. Après calculs, on obtient : $\displaystyle F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$

Ainsi, $\displaystyle I = \left(-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|\right)_1^2 = \ln(3/4) + 1/2$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\displaystyle\int_1^e \ln x\ dx = (x\ln x - x)_1^e = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

En intégrant par parties.

4°. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\ dx = (-x\cos x)_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x dx = 1$

De la même façon. $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx = 2\int_0^1 ue^u\ du$

$\displaystyle = (2ue^u)_0^1 - 2\int_0^1 e^u\ du = 2$ $\boxed{\text{1 point}}$

6°. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\ dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^{+\infty} = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

7°. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{12}$ $\boxed{\text{1 point}}$

8°. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\text{ch } x} = \int_e^{+\infty}\frac{2}{u^2+1}du = \pi - 2\arctan e$

$\boxed{\text{2 points}}$

9°. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2t+3}$

$\displaystyle = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)^2+2} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)]_0^{\infty}$

$= \sqrt{2}(\pi/2 - \arctan(1/\sqrt{2}))$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. $\boxed{\text{8 points}}$ Résoudre :

Les trois premières équations sont à variables séparables. Les trois dernières sont des équations linéaires qui ont même équation homogène associée, ce qui donne des calculs pas très difficiles à effectuer.

1°. $xy' - y = 0$

$\iff y'/y = 1/x \iff \ln|y| = \ln|x| + K \iff y = kx$

$k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $y' - xy = x$

$\displaystyle\iff y' = x(1+y) \iff \frac{y'}{1+y} = x$

$\displaystyle\iff \ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + K \iff y = ke^{x^2/2} - 1$

$k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\displaystyle y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ équation homogène associée.

$\displaystyle\iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \iff y = ke^{-1/x}\ k \in \mathbb{R}$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante en supposant $y_0(x) = k(x)e^{-1/x}$ où $k(x)$ est une fonction de classe C^1. En dérivant et en injectant dans l'équation, on obtient :

$k'(x) = e^x$ et l'on en déduit donc que $k(x) = e^x$;
$y_0(x) = \exp(x - 1/x)$

La solution générale de l'équation est
$y(x) = e^{-1/x}(k + e^x)$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. $y' + y = e^x$

L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ dont les solutions sont de la forme $y = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$. Nous recherchons ensuite une solution particulière sous une forme voisine du second membre. On s'aperçoit que $e^x/2$ convient et l'on en conclut alors aussitôt que la solution générale de cette équation est $y(x) = ke^{-x} + e^x/2$.
$\boxed{\text{2 points}}$

5°. $y' + y = x^2$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $y_0'(x) = 2ax$ et en injectant dans l'équation il vient $a = 1, b = -2, c = 2$. La solution générale de l'équation est donc
$y(x) = ke^{-x} + x^2 - 2x + 2.$ $\boxed{\text{1 point}}$

6°. $y' + y = \sin x$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\sin x + b\cos x$. Alors $y_0'(x) = a\cos x - b\sin x$ et en injectant dans l'équation il vient $a = 1/2$ et $b = -1/2$. La solution générale de l'équation est donc
$\displaystyle y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x).$ $\boxed{\text{1 point}}$