MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 28/11/08 - Durée : 2h -

2008/2009

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrice interdite.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles ci-dessous :

1°. $\dfrac{2}{(x-4)(x-2)} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

La fraction possède deux pôles simples, on peut donc appliquer le théorème des résidus pour calculer les deux constantes.

2°. $\dfrac{x-3}{x(x-1)^2} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{(x-1)^2} + \dfrac{\gamma}{x}$

La fraction possède 1 comme pôle double et 0 comme pôle simple. Le théorème des résidus permet de trouver $\gamma = -3$. Ensuite, il faut utiliser des astuces : on multiplie les deux membres par $(x-1)^2$ et en posant $x = 1$ on obtient $\beta = -2$; enfin, en multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini, on obtient $\alpha = 3$. Finalement :

$$F(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3°. $\dfrac{x^4 - x + 2}{x(x^2+1)} = x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1+3x}{x^2+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Il y a une partie entière que l'on trouve en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Pour le reste de la fraction, 0 est un pôle simple et x^2+1 assure la présence d'un élément polaire de seconde espèce. Le théorème des résidus permet de trouver le résidu relatif à 0. Ensuite, on peut multiplier par x^2+1 les deux membres et poser $x = i$.

II. 5 points.

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

1°. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Pour le corrigé, cf. cours et TD. $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$

En appliquant deux foix de suite la règle de l'Hospital.

$\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - 1/x}{1/x^2}$$

On applique alors la règle de l'Hospital :

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-2}e^{1/x} + x^{-2}}{-2x^{-3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} + 1}{-2x^{-1}} = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

III. 5 points.

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

1°. Démontrer soigneusement que le domaine de définition de f est $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

La fonction existe ssi $\dfrac{x}{x-1} > 0$. Le signe de cette expression est le même que celui de $x(x-1)$ qui est positif à l'extérieur des racines 0 et 1. $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Effectuer l'étude complète de la fonction $f(x)$

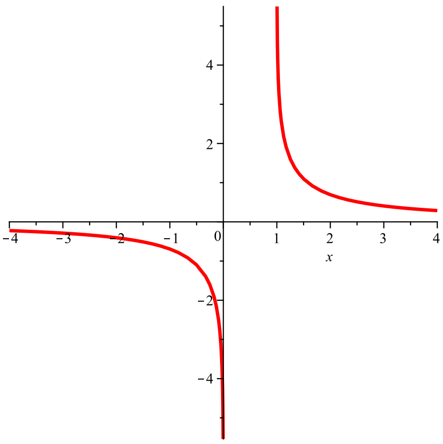
Après calculs, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x(x-1)}$ $\boxed{\text{1 point}}$

D'après la question précédente, $f'(x) < 0$ et la fonction est donc décroissante sur son domaine de définition. Elle tend vers 0 en $\pm\infty$. Par ailleurs, $\lim x \to 0^- f(x) = -\infty$ et $\lim x \to 1^+ f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f''(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ qui est du signe de $2x-1$. Ainsi, $f''(x) > 0 \iff x > 1/2$. f est convexe si $x > 1$ et concave si $x < 0$. Comme $1/2$ n'appartient pas au domaine de définition, il n'y a pas de point d'inflexion. $\boxed{\text{1 point}}$

La courbe possède deux asymptotes verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, ainsi qu'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

La courbe est sur $\boxed{\text{1 point}}$



IV. 5 points.

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

1°. Déterminer le domaine de définition de g.

$g(x)$ existe ssi $x^2 + x - 2 \geq 0$. Les racines de ce polynôme du second degré sont -2 et 1 et par suite, le domaine de définition de $g(x)$ est $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Effectuer l'étude complète de la fonction $g(x)$.

Après calculs, on a $g'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$ qui est du signe de $2x+1$. La fonction est donc croissante si $x \geq 1$ et décroissante si $x \leq -2$. $\boxed{\text{1 point}}$.

$g''(x) = -\dfrac{9}{4(x^2+x-2)^{3/2}} < 0$ et la fonction est donc concave $\boxed{\text{1 point}}$

La fonction tend $+\infty$ en $+\infty$. De même,

$\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x^2}} = 1$ et
$\lim_{x\to+\infty} (g(x)-x) = 1/2$ en multipliant par l'expression conjuguée. La droite d'équation $x+1/2$ est asymptote oblique en $+\infty$. De la même façon, on voit que $-x-1/2$ est asymptote oblique en $-\infty$. $\boxed{\text{1 point}}$

La courbe est sur $\boxed{\text{1 point}}$